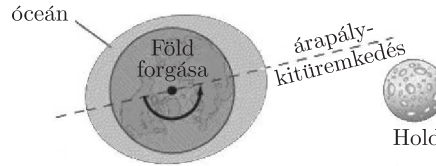


## 1. feladat. A Föld–Hold rendszer fejlődése

A tudósok nagy pontossággal meg tudják határozni a Föld–Hold távolságot. Ezt úgy végzik el, hogy űrhajósok által 1969-ben a Holdra helyezett speciális tükörrre lőtt lézersugár visszaverődési idejét mérik (hátsó belső borító, bal felső ábra).

Ilyen módszerrel közvetlenül megmutatható, hogy a Hold lassan távolodik a Földtől, azaz a Föld–Hold távolság időben lassan növekszik. Ennek oka az, hogy az árapály jelenség során a Föld forgatónyomatékkal hat a Holdra, és így (pálya-) impulzusmomentumát (perdületét) megváltoztatja (1. ábra). Ebben a feladatban ennek a jelenségnek a legfontosabb paramétereit vizsgáljuk meg.



1. ábra. A Hold gravitációs hatása következtében a Föld vízfelszínén árapály deformációk, kitüremkedések („bulges”) jönnek létre. A Föld forgása miatt a kitüremkedések tengelye nem esik pontosan egybe a Föld–Hold egyenessel. Ez a kis eltérés olyan forgatónyomatékokat eredményez, mely a Föld forgásának impulzusmomentumát csökkenti, a Hold pálya menti impulzusmomentumát pedig növeli. Az ábra nem méretarányos

### 1. Impulzusmomentum-megmaradás

Legyen  $L_1$  a Föld–Hold rendszer jelenlegi impulzusmomentuma. Élünk a következő közelítő feltevésekkel:

- $L_1$  csupán a Földnek a tengely körüli forgásából adódó impulzusmomentumának és a Holdnak a Föld körüli keringéséből adódó (pálya-) impulzusmomentumának összege.
- A Hold pályája kör alakú, és a Hold pontszerűnek tekinthető.
- A Föld forgástengelye és a Hold keringésének tengelye párhuzamos.
- A számolás egyszerűsítése érdekében úgy tekintjük, hogy a mozgás a Föld középpontja körül megy végbe, nem pedig a rendszer tömegközéppontja körül. Ebben a feladatban mindenütt minden tehetetlenségi nyomatékot, impulzusmomentumot illetve forgatónyomatékokat a Föld tengelyére vonatkoztatunk.
- A Nap hatását elhanyagoljuk.

1.a. Add meg a Föld–Hold rendszer jelenlegi teljes impulzusmomentumát! Válaszodat a következő mennyiségekkel fejezd ki: a Föld tehetetlenségi nyomatéka:  $I_F$ ; a Föld forgásának jelenlegi szögsebessége:  $\omega_{F1}$ ; a Hold jelenlegi tehetetlenségi nyomatéka a Föld tengelyére vonatkoztatva:  $I_{H1}$ ; a Hold keringésének jelenlegi szögsebessége:  $\omega_{H1}$ .

Ez az impulzusmomentum-átadási folyamat addig tart, amíg a Föld forgásának periódusideje egyenlővé nem válik a Hold Föld körüli keringésének idejével. Ekkor a Hold által az óceánok felszínén okozott árapály kitüremkedések („bulges”) tengelye egybe fog esni a Föld–Hold egyenessel, és a két égitest közti forgatónyomaték nullává válik.

1.b. Add meg a Föld–Hold rendszer teljes  $L_2$  impulzusmomentumát ebben a végső helyzetben! Ugyanazokkal az egyszerűsítő feltevésekkel dolgozz, mint az 1.a. feladatban. Végeredményed a következő mennyiségekkel fejezd ki: a Föld tehetetlenségi nyomatéka:  $I_F$ ; a Föld forgásának és a Hold keringésének végső szögsebessége:  $\omega_2$ ; a Hold végső tehetetlenségi nyomatéka:  $I_{H2}$ .

1.c. A végső teljes impulzusmomentumban a Föld forgásának járulékát elhanyagolva írd föl az impulzusmomentum-megmaradás egyenletét erre a problémára!

### 2. Végső pályasugár és végső szögsebesség a Föld–Hold rendszerben

Tegyük föl, hogy a Holdat a gravitációs erő minden esetben a Föld körüli körpályán tartja. A végső, teljes impulzusmomentumban a Föld forgásának járulékát hanyagoljuk el.

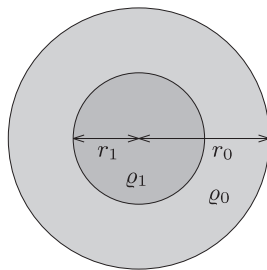
2.a. A végső helyzetben írd föl a Föld körül keringő Holdra a körmozgás alapegyenletét a következő mennyiségek felhasználásával:  $M_F$ ,  $\omega_2$ ,  $G$  és  $D_2$ , ahol  $D_2$  a végső távolság a Föld és a Hold között,  $M_F$  a Föld tömege,  $G$  pedig a gravitációs állandó.

2.b. Add meg a Hold végső pályasugarát,  $D_2$ -t a következő mennyiségekkel: a rendszer teljes impulzusmomentuma:  $L_1$ ; a Föld, illetve a Hold tömege:  $M_F$ , illetve  $M_H$ ; a gravitációs állandó  $G$ .

2.c. Add meg a Föld–Hold rendszer végső  $\omega_2$  szögsebességének képletét az  $L_1$ ,  $M_F$ ,  $M_H$  és  $G$  mennyiségek segítségével!

Most  $D_2$  és  $\omega_2$  számszerű értékét határozzuk meg. Ehhez szükség van a Föld tehetetlenségi nyomatékára.

2.d. Tételezzük föl, hogy a Föld sűrűsége belül, a középponttól  $r_1$  sugárig  $\rho_1$ , míg ezen kívül, tehát az  $r_1$  sugártól a felszíniig,  $r_0$ -ig a sűrűség  $\rho_0$ . Add meg a Föld  $I_F$  tehetetlenségi nyomatékának képletét (2. ábra)!



2. ábra. A gömb alakú Föld a két különböző,  $\rho_1$  és  $\rho_0$  sűrűségű tartománnyal

Ebben a feladatban a kért számadatokat **minden esetben két értékes jegy** pontossággal határozd meg!

**2.e.** Határozd meg a Föld  $I_F$  tehetetlenségi nyomatékának számértékét, felhasználva, hogy  $\rho_1 = 1,3 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $r_1 = 3,5 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $\rho_0 = 4,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  és  $r_0 = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

A Föld, illetve a Hold tömege  $M_F = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , illetve  $M_H = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ . A két égitest jelenlegi távolsága  $D_1 = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$ . A Föld forgásának jelenlegi szögsebessége  $\omega_{F1} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . A Hold Föld körüli keringésének jelenlegi szögsebessége  $\omega_{H1} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , a gravitációs állandó értéke pedig  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

**2.f.** Határozd meg a rendszer  $L_1$  teljes impulzusmomentumának számértékét!

**2.g.** Határozd meg a végső,  $D_2$  pályasugár értékét méterben, valamint a jelenlegi,  $D_1$  pályasugár arányában!

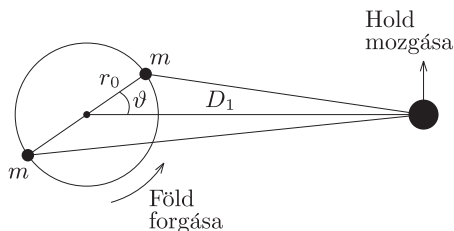
**2.h.** Határozd meg a végső,  $\omega_2$  szögsebesség értékét  $\text{s}^{-1}$ -ban, valamint add meg a végső helyzetben egy nap hosszát a jelenlegi nap hosszának arányában!

Ellenőrizd, hogy a végső, teljes impulzusmomentumban a Föld forgásából adódó járulék valóban elhanyagolható! Ehhez azt kell megmutatni, hogy a Föld és a Hold végső impulzusmomentumának aránya kis szám.

**2.i.** Határozd meg a végső helyzetben a Föld és a Hold impulzusmomentumának arányát!

### 3. Mennyivel távolodik a Hold évenként?

Ebben a részben azt határozzuk meg, hogy mennyivel távolodik a Hold a Földtől évenként. Ehhez először ki kell számolni, hogy jelenleg mekkora forgatónyomatékot fejt ki a Föld a Holdra. Tegyük fel, hogy az árapály deformációból származó kitüremkedések két  $m$  tömegű tömegponttal közelíthetők, melyek a Föld felszínén helyezkednek el (3. ábra). Legyen továbbá  $\vartheta$  a Föld–Hold egyenesnek a kitüremkedések tengelyével bezárt szöge.



3. ábra. Vázlat a dagály-kitüremkedések által a Holdra kifejtett forgatónyomaték számolásához. Az ábra nem méretarányos

**3.a.** Add meg a Holdhoz közelebbi tömegpont Holdra ható gravitációs erejének  $F_c$  nagyságát!

**3.b.** Add meg a Holdtól távolabbi tömegpont Holdra ható gravitációs erejének  $F_f$  nagyságát!

Ezután meghatározhatjuk a tömegpontok forgatónyomatékát.

**3.c.** Határozd meg a közelebbi tömegpont Holdra ható  $\tau_c$  forgatónyomatékának nagyságát!

**3.d.** Határozd meg a közelebbi tömegpont Holdra ható  $\tau_f$  forgatónyomatékának nagyságát!

**3.e.** Határozd meg a két tömegpont  $\tau$  eredő forgatónyomatékának nagyságát! Mivel  $r_0 \ll D_1$ , az eredményt  $r_0/D_1$  első nem eltűnő hatványáig sorbafejtve add meg. Felhasználhatod, hogy  $(1+x)^a \approx 1+ax$ , ha  $x \ll 1$ .

**3.f.** Add meg a  $\tau$  forgatónyomaték számértékét, felhasználva, hogy  $\vartheta = 3^\circ$ , és  $m = 3,6 \cdot 10^{16} \text{ kg}$ . (Megjegyzendő, hogy ennek a tömegnek a nagyságrendje  $10^{-8}$ -szorosa a Föld tömegének.)

Felhasználva, hogy a forgatónyomaték az impulzusmomentum időbeli változási sebessége, határozd meg a Föld–Hold távolság éves növekedésének jelenlegi értékét! Ehhez fejezd ki a Hold impulzusmomentumát kizárólag az  $M_H$ ,  $M_F$ ,  $D_1$  és  $G$  mennyiségekkel.

**3.g.** Határozd meg a Föld–Hold távolság évenkénti növekedésének jelenlegi értékét!

Végül becsüld meg, hogy mennyivel nő egy év alatt egy nap hossza.

**3.h.** Add meg, hogy egy év alatt mennyivel csökken  $\omega_{F1}$ , és jelenleg mennyivel nő egy nap hossza egy év alatt!

**4. Hová lesz az energia?** Az impulzusmomentummal szemben, ami megmarad, a rendszer teljes mechanikai energiája (forgási és gravitációs) nem állandó. Az utolsó részben ezt a kérdést vizsgáljuk.

**4.a.** Add meg a Föld–Hold rendszer teljes  $E$  mechanikai energiáját (forgási- plusz gravitációs energiáját) az égitestek jelenlegi helyzetében! Az eredményt kizárólag az  $I_F$ ,  $\omega_{F1}$ ,  $M_H$ ,  $M_F$ ,  $D_1$  és  $G$  mennyiségekkel fejezd ki!

**4.b.** Fejezd ki az  $E$  energia megváltozását,  $\Delta E$ -t a  $D_1$  és  $\omega_{F1}$  mennyiségek megváltozásával! Határozd meg  $\Delta E$  számszerű értékét egy évre vonatkoztatva, felhasználva a  $D_1$  és  $\omega_{F1}$  mennyiségek megváltozásának  $3g$  és  $3h$  pontban kiszámolt értékét!

Most ellenőrizzük, hogy az így kapott energiaveszteség összeegyeztethető azzal a hővel, amit a Hold árapály hatása hoz létre a Földön. Tegyük föl, hogy a dagály átlagosan 0,5 m-rel emel meg egy  $h = 0,5$  m mély vízréteget, a Föld teljes felszínén. (Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a Föld teljes felszíne vízzel van borítva.) Ez az emelkedés (dagály) minden nap kétszer következik be. Tegyük fel továbbá, hogy a víz viszkozitásának következtében ennek a gravitációs energiának 10%-a disszipálódik hő formájában apály alkalmával. A víz sűrűsége  $\rho_{\text{víz}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , és a Föld felszínén a gravitációs gyorsulás  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

**4.c.** Mekkora a szóban forgó felületi vízréteg tömege?

**4.d.** Határozd meg, hogy mennyi energia disszipálódik egy év alatt! Milyen viszonyban áll ez a Föld–Hold rendszer mechanikai energiájának jelenlegi évenkénti csökkenésével?