

2. feladat. Felemelkedő ballon

Egy héliummal töltött gumiballon a levegőben magasra emelkedik, olyan régiókba, ahol a nyomás és a hőmérséklet a magasság növekedésével csökken. A következő kérdések tanulmányozásánál tételezzük fel, hogy a ballon a terheléstől függetlenül minden esetben gömbölyű marad, és hanyagoljuk el a terhelés térfogatát. Tegyük fel azt is, hogy a ballonban lévő héliumgáz hőmérséklete mindig azonos a környező levegő hőmérsékletével, és minden gázt kezeljünk ideális gázként. Az univerzális gázállandó $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, és a hélium, illetve a levegő moláris tömege rendre $M_H = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$, illetve $M_A = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$. A nehézségi gyorsulás $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A rész: (a) (1,5 pont) A környező levegő nyomása legyen P , hőmérséklete pedig T . A ballon „felületi feszültségének” következtében a ballon belsejében a nyomás nagyobb a külső nyomásnál. A ballon n mol héliumgázt tartalmaz, és a belsejében a nyomás $P + \Delta P$. Határozd meg a ballonra ható felhajtóerőt P és ΔP függvényében!

(b) (2 pont) Egy szép nyári napon Koreában a levegő T hőmérséklete a tengerszint feletti z magasság függvényében a $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ függvény szerint változott a $0 < z < 15 \text{ km}$ tartományban, ahol $z_0 = 49 \text{ km}$ és $T_0 = 303 \text{ K}$. A tengerszinten a nyomás, illetve a sűrűség értéke $P_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, illetve $\rho_0 = 1,16 \text{ kg/m}^3$ volt. Ebben a magasság tartományban a nyomás a

$$(2.1) \quad P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta.$$

formulával adható meg. Fejezd ki az η kitevőt a z_0 , ρ_0 , P_0 és g paraméterekkel, és határozd meg numerikus értékét két értékes számjeggyel pontossággal. A nehézségi gyorsulást tekintsd a magasságtól független konstansnak.

B rész: Ha egy gömb alakú, nyújtatlan állapotban r_0 sugarú gumiballont ($> r_0$) sugarúra fújunk fel, a gumi megnyúlása miatt a ballon felülete extra rugalmas energiára tesz szert. Egy egyszerű elmélet szerint állandó T hőmérsékleten ennek a rugalmas energiának az értéke

$$(2.2) \quad U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right),$$

ahol a $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) számértéket lineáris méretnövekedési aránynak nevezzük, a κ paraméter pedig egy mol/m^2 dimenziójú állandó.

(c) (2 pont) Fejezd ki ΔP -t a (2.2) egyenletben szereplő paraméterek függvényében, és ábrázold vázlatosan a ΔP nyomáskülönbséget a $\lambda = r/r_0$ mennyiség függvényében.

(d) (1,5 pont) A κ konstans meghatározható a ballon felfújásához szükséges gáz mennyiségéből. A feszítetlen falú ($\lambda = 1$) ballon $T_0 = 303 \text{ K}$ hőmérsékleten és $P_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomáson $n_0 = 12,5 \text{ mol}$ héliumot tartalmaz. Ugyanezen a T_0 hőmérsékleten és P_0 nyomáson a $\lambda = 1,5$ méretűre felfújt ballon összesen $n = 3,6 \cdot n_0 = 45 \text{ mol}$ héliumot tartalmaz. Fejezd ki n , n_0 és λ segítségével az $a = \kappa/\kappa_0$ képlettel definiált úgynevezett „ballonparamétert”, ahol $\kappa_0 \equiv \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$, valamint határozd meg a értékét két értékes számjeggyel pontossággal.

C rész: A ballont tengerszinten a (d) pontban leírt módon készítjük elő (azaz $n = 3,6 \cdot n_0 = 45 \text{ mol}$ hélium gázzal $\lambda = 1,5$ méretűre fújuk fel $T_0 = 303 \text{ K}$ hőmérsékleten és $P_0 = 1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomáson). A szerkezet teljes tömege (figyelembe véve a gumiballont, a bezárt gázt és minden egyéb terhet) $M_T = 1,12 \text{ kg}$. Ekkor a tengerszintről elengedjük a ballont.

(e) (3 pont) Tegyük fel, hogy a ballon z_f magasságig emelkedik, és ott megáll. Ezen a szinten a felhajtóerő egyensúlyt tart a nehézségi erővel. Határozd meg z_f értékét, valamint ebben a magasságban a λ_f paramétert (lineáris méretnövekedési arányt). Válaszodat két értékes jegy pontossággal add meg. A ballon nem sodródik oldalirányban, és nem szökik el belőle gáz.