

2. feladat. Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel

Tekintsünk egy homogén, A keresztmetszetű rudat, melynek mechanikai feszültségektől mentes állapotban a hossza ℓ (3. ábra).

3. ábra

Ha a rúd két végén azonos nagyságú, de ellentétes irányú, a felületre merőleges F erő hat, a rúd hossza $\Delta\ell$ -el

megváltozik. A T mechanikai feszültséget a rúd végein az F/A képlet definiálja. A rúd hosszának relatív megváltozását, azaz $\Delta\ell/\ell$ -t deformációnak nevezzük, és S -sel jelöljük. A mechanikai feszültség és a deformáció segítségével a Hooke-törvényt a következő alakban is felírhatjuk:

$$(1) \quad T = Y S \quad \text{vagy} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell},$$

ahol Y a rúd anyagának *Young-modulusa*. Jegyezzük meg, hogy T nyomó feszültség, ha $F < 0$ és a rúd hossza csökken (azaz $\Delta\ell < 0$). Az ilyen feszültség tehát negatív, és értéke a p nyomás (-1) -szerese: $T = -p$. Egy homogén, ϱ sűrűségű rúdban a longitudinális hullámok terjedési sebessége (azaz a hangsebesség) a következő képlettel adható meg:

$$(2) \quad u = \sqrt{\frac{Y}{\varrho}}.$$

(A feladat megoldása során minden csillapítás és elnyelődés elhanyagolható.)

A. Mechanikai tulajdonságok

Egy homogén, egyik irányban végtelen rúd (kiterjedése $x = 0$ -tól ∞ -ig tart), sűrűsége ϱ . A rúd kezdetben nyugalomban van és feszültségmentes. A rúd bal felületére az $x = 0$ helyen egy nagyon rövid Δt ideig állandó, kicsiny p nyomás hat, és ezzel elindít egy u sebességgel jobbra haladó nyomáshullámot (4. ábra).

4. ábra

a) Mekkora ez alatt a Δt idő alatt az S deformáció és a p nyomás a rúd bal oldali felületénél, ha a dugattyú a rúd bal oldali felületét állandó v sebességgel mozgatja (*4. ábra*)? A választ ϱ , u és v függvényében kell megadni (*1,6 pont*)!

5. ábra

b) Tekintsünk egy longitudinális hullámot, amely x irányban terjed a rúdban! Jelöljük a rúd feszültségmentes állapotában x helyen levő keresztmetszetének t időpontbeli elmozdulását $\xi(x, t)$ -vel (*5. ábra*), és tételezzük fel, hogy

$$(3) \quad \xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

ahol ξ_0 és k állandók. Határozd meg a megfelelő $v(x, t)$ sebességet, $S(x, t)$ deformációt és $p(x, t)$ nyomást x és t függvényében (2,4 pont)!

B. Elektromechanikai tulajdonságok (beleértve a piezoelektromos hatást)

Tekintsünk egy hasáb alakú kvarckristályt, amelynek hossza b , vastagsága h és szélessége w (6. ábra)! A hossza x tengely irányú, vastagsága pedig z tengely irányú. Az alsó és a felső felületén vékony fémbevonat segítségével elektromos kontaktusokat alakítottak ki. Az elektromos vezetékek, amelyek egyben tartószerkezetként is szolgálnak (7. ábra) a kontaktusok közepére vannak forrasztva, ezért az x irányú longitudinális rezgések során ezek a pontok nyugalomban kell maradjanak.

7. ábra

A vizsgált kvarckristály sűrűsége $\varrho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, Young-modulusa pedig $Y = 7,87 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. A hasáb hossza $b = 1,00 \text{ cm}$, a w szélességre és a h vastagságra pedig $h \ll w \ll b$ teljesül. A K kapcsoló nyitva van, és feltételezzük, hogy csak x irányú longitudinális módusú állóhullámok gerjesztődnek a kvarc hasáiban.

Egy $f = \omega/(2\pi)$ frekvenciájú állóhullámban a $\xi(x, t)$ elmozdulás a következő alakba írható:

$$(4a) \quad \xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b),$$

ahol ξ_0 egy pozitív konstans, a $g(x)$ helyfüggő tényező

$$(4b) \quad g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right)$$

alakú, $g(x)$ maximális értéke 1 és $k = \omega/u$. Ne felejtse el, hogy az elektromos kontaktusok közepe nyugalomban van, és hogy a hasáb bal és jobb vége szabad, a mechanikai feszültség (vagy a nyomás) értéke ezeken a helyeken nulla kell legyen!

c) Határozd meg a (4b) képletben szereplő B_1 és B_2 állandók értékét, ha a kvarc hasábjában egy longitudinális állóhullám alakul ki (1,2 pont)!

d) Mekkora az a két legkisebb frekvencia, amelyen longitudinális állóhullám gerjeszthető a kvarc hasábjában (1,2 pont)?

A *piezoelektromos hatás* a kvarckristály speciális tulajdonsága. A kristály összenyomása vagy megnyújtása elektromos feszültséget hoz létre a kristályban, és fordítva, a kristályra kapcsolt külső elektromos feszültség vagy megnyúlást, vagy összehúzódást okoz, a polaritástól függően. Így a mechanikai és az elektromos rezgések csatolódnak és rezonálhatnak a kvarckristályban.

Legyen a felső és az alsó elektromos kontaktus elektromos töltéssűrűsége $-\sigma$, illetve $+\sigma$, ha a kvarc hasábjában E nagyságú, z irányú elektromos tér van! Jelölje a hasáb x irányú deformációját és mechanikai feszültségét S , illetve T ! Ekkor a piezoelektromos hatás a kvarckristályban a következő egyenletrendszerrel írható le:

$$(5a) \quad S = (1/Y)T + d_p E,$$

$$(5b) \quad \sigma = d_p T + \varepsilon_T E,$$

ahol $1/Y = 1,27 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ a Young-modulus reciproka állandó elektromos tér esetén, $\varepsilon_T = 4,06 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$ a dielektromos állandó konstans mechanikai feszültség esetén, $d_p = 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$ pedig a piezoelektromos együttható.

Legyen most a 6. ábrán látható K kapcsoló zárva! Ekkor $U(t) = U_m \cos \omega t$ elektromos váltófeszültség jelenik meg a kontaktusokon, és a kvarc hasábjában homogén, $E(t) = U(t)/h$ nagyságú, z irányú elektromos tér keletkezik. Az állandósult állapot kialakulása után a hasábjában egy x irányú, ω körfrekvenciájú longitudinális állóhullám figyelhető meg.

Mivel E homogén, a λ hullámhossz és a hasábjában lévő állóhullámok f frekvenciája között továbbra is érvényes a $\lambda = u/f$ összefüggés, ahol u értékét a (2) egyenlet adja meg. A $T = YS$ összefüggés azonban most már nem érvényes, mint ahogy azt az (5a) egyenlet is mutatja. Ugyanakkor a deformáció és a mechanikai feszültség definíciója változatlan, a hasáb végei pedig továbbra is szabadok, nulla mechanikai feszültséggel.

e) Az (5a) és az (5b) egyenletek figyelembevételével a σ felületi töltéssűrűség az alsó elektromos kontaktuson x és t függvényében

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{U(t)}{h}$$

alakú lesz, ahol $k = \omega/u$. Vezesse le a fenti D_1 és D_2 mennyiségeket megadó összefüggéseket (2,2 pont)!

f) Az alsó kontaktuson lévő teljes $Q(t)$ elektromos töltés az $U(t)$ feszültségtől a

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 U(t).$$

képlet szerint függ. Vezesse le a kifejezésben szereplő C_0 és α^2 mennyiségeket megadó összefüggéseket, valamint α^2 numerikus értékét (1,4 pont)!