

1. feladat. Inga, melynek felső végét is egy súly húzhatja

Egy R sugarú merev rudat a talaj felett bizonyos magasságban vízszintes helyzetben rögzítettünk. Egy elhanyagolható tömegű, L hosszúságú ($L > 2\pi R$) fonál egyik végét az *1. ábrán* látható módon a rúd legfelső, A pontjában rögzítettük, a másik végére m tömegű pontszerűnek tekinthető testet erősítve ingát készítettünk. A fonalat feszesen tartva az inga nehezékét az A ponttal azonos magasságba emeljük, majd onnan kezdősebesség nélkül elengedjük. A fonalat kezdetben feszültségmentesnek tekinthetjük, és feltehetjük, hogy az ingatest a rúd tengelyére merőleges síkban mozog. A továbbiakban az ingatestet részecskének fogjuk nevezni. A nehézségi gyorsulás g .

1. ábra

Legyen O a koordináta-rendszerünk origója! Amikor a részecske a P pontban van, a fonál a hengerfelület Q pontbeli érintőjével egyirányú. A QP szakasz hosszát s -sel jelöljük. A Q pontbeli érintő irányú egységvektort jelölje $\hat{\mathbf{t}}$, a sugár irányú egységvektort pedig $\hat{\mathbf{r}}$. Az OQ sugár szögelfordulása θ , melyet az OA függőleges x tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban tekintjük pozitívnak.

Amikor $\theta = 0$, az s távolság nagysága L , és a részecske gravitációs potenciális energiája, U legyen nulla. A részecske

mozgása során az időben változó θ és s mennyiségek változási sebességét jelölje $\dot{\theta}$ és $\dot{s}$. Hacsak nem jelezzük másként, valamennyi sebességet a rögzített O pontra vonatkoztatjuk.

A. Ebben a részben a részecske mozgása során a fonál végig feszes marad. A fentebb bevezetett mennyiségek (vagyis s , θ , $\dot{s}$, $\dot{\theta}$, R , L , g , $\hat{\mathbf{t}}$ és $\hat{\mathbf{r}}$) segítségével fejezzük ki:

- $\dot{\theta}$ és $\dot{s}$ közötti kapcsolatot (*0,5 pont*).
- A mozgó Q pont O ponthoz viszonyított sebességvektorát (*0,5 pont*).
- A P pontban levő részecske Q ponthoz viszonyított $\mathbf{v}_Q$ sebességvektorát (*0,7 pont*).
- A P pontban levő részecske $\mathbf{v}$ sebességvektorát az O ponthoz viszonyítva (*0,7 pont*).
- A P pontban levő részecske O pontra vonatkoztatott gyorsulásának komponensét (*0,7 pont*).
- A P pontban levő részecske U gravitációs potenciális energiáját (*0,5 pont*).
- A részecske sebességének v_m nagyságát a pályájának legalacsonyabb pontjában (*0,7 pont*).

B. Ebben a részben az L és R mennyiségek aránya legyen

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{16} \approx 6,886.$$

h) Adjuk meg a részecske sebességének nagyságát (g és R függvényében) abban a helyzetben, amikor a QP fonalhossz a legrövidebb, de a fonál még nem lazult meg (*2,4 pont*).

i) Mekkora a rúd túlsó oldalára átlendült részecske sebessége (g és R függvényében) a pályájának ottani legmagasabb, H pontjában (*1,9 pont*)?

C. Ebben a részben az m tömegű nehezebbel rendelkező inga fonáljának felső végét nem rögzítjük az A ponthoz, hanem a fonalat a rúd tetején átvetve a végét egy nehezebb, M tömegű súlyhoz kapcsoljuk, az *2. ábrán* látható módon. A súly ugyancsak pontszerűnek tekinthető. Kezdetben az ingatestet az A ponttal azonos magasságban tartjuk, a másik oldalon a súly az O pontnál mélyebben helyezkedik el, a fonál feszes, és a vízszintes részének hossza L . Ezután az ingatestet kezdősebesség nélkül elengedjük, és a súly is süllyedni kezd. Feltehetjük, hogy az ingatest mindvégig egy függőleges síkban mozog, és át tud lendülni a lefelé mozgó súly mellett, anélkül, hogy egymás mozgását megzavarnák. A rúd felülete és a fonál közötti csúszási súrlódás elhanyagolható, a tapadó súrlódásról viszont feltesszük, hogy az elegendően nagy, és emiatt az egyszer megálló súly nem tud ismét megmozdulni, nyugalomban kell maradjon.

2. ábra

j) Tegyük fel, hogy a súly D nagyságú függőleges elmozdulás után valóban megáll, és hogy $(L - D) \gg R$. Ahhoz, hogy az ingatest a rúd körül teljesen körbefordulhasson, vagyis $\theta = 2\pi$ lehessen, még hozzá úgy, hogy a fonál mindkét ága egyenes maradjon, az szükséges, hogy az $\alpha = D/L$ hosszúságarány ne legyen kisebb egy bizonyos kritikus α_k értéknél.

Elhanyagolva az R/L nagyságrendű, vagy ennek magasabb hatványait tartalmazó kicsiny tagokat, adjunk becslést α_k nagyságára az M/m tömegaránnyal kifejezve (3,4 pont)!