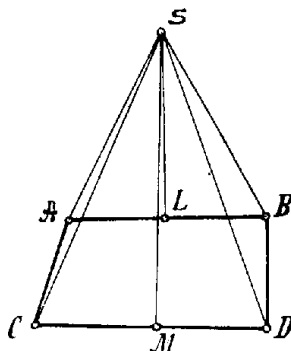


397.¹ Mennyiségtani játékok.

A K.M.L. IV. évfolyamának 7. számában néhány tréfás algebrai bizonyítást mutattunk be; lássunk most geometriai bizonyításokat, melyek hibás eredményre vezetnek.

1. *Kimutatjuk, hogy a tompa szög egyenlő a derékszöggel.* Legyen adva az $ABCD$ négyszög, melyben $ABD\angle = 90^\circ$, BAC szög tompaszög és $AC = BD$. AB és CD oldalak középpontjaiban merőlegeseket emelünk, melyek egymást S pontban metszik.



Kössük össze S -et a négyszög csúcspontjaival. Nyilvánvaló, hogy

$$SA = SB, SC = SD.$$

Mint hogy továbbá feltevés szerint $BD = AC$, tehát

$$SAC\triangle \cong SBD\triangle,$$

mert oldalaik sorban egyenlők. Ennélfogva

$$CAS\angle = DBS\angle.$$

Másrészt világos, hogy

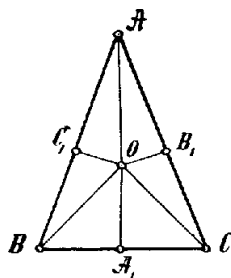
$$LAS\angle = LBS\angle,$$

mert az SAB háromszög egyenlőszárú s így

$$CAS\angle - LAS\angle = DBS\angle - LBS\angle$$

tehát $CAB\angle = ABD\angle$.

2. *Minden háromszög egyenlőszárú.* Rajzoljuk meg az ABC háromszögben az AO szögfelezőt s emeljünk BC középpontjában merőlegest. Ha $AO \perp BC$ -re, akkor AO egybe esik A_1O -val, $AB = AC$ és a háromszög egyenlőszárú. De ha AO nem merőleges BC -re, akkor AO és A_1O egymást egy O pontban metszik.



Bocsássunk O -ból az AB és AC oldalakra merőlegeseket. Ekkor

$$AOB_1\triangle \cong AOC_1\triangle$$

mert mindkettő derékszögű, AO átfogójuk közös és $OAB_1\angle = OAC_1\angle$. Tehát

(1)

$$AB_1 = AC_1$$

és

$$OB_1 = OC_1.$$

Továbbá

$$A_1OB\triangle \cong A_1OC\triangle,$$

mert mindkettő derékszögű és befogóik egyenlők. Ennélfogva

$$OB = OC.$$

Végül

$$OB_1C\Delta \cong OC_1B\Delta,$$

mert mindkettő derékszögű, továbbá a megelőzők szerint $OB = OC$ és $OC_1 = OB_1$. Így tehát

$$(2) \quad BC_1 = CB_1$$

(1)-ből és (2)-ből tehát következik, hogy

$$AB_1 + B_1C = AC_1 + C_1B$$

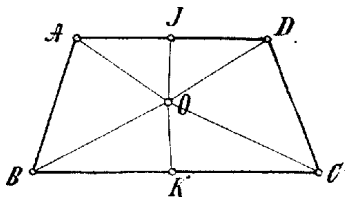
vagy

$$AC = AB$$

s így az ABC háromszög csakugyan egyenlőszárú.

3. Ha egy négyszögben két szemközt fekvő oldal egyenlő, akkor a másik két szemközt fekvő oldal párhuzamos.

Ha tehát $AB = DC$, akkor $AD \parallel BC$. Emeljünk az AD és BC oldalak középpontjaiban merőlegeseket, melyek egymást O -ban metszik és kössük össze O -t a négyszög csúcspontjaival.



Nyilvánvaló, hogy

$$OA = OD, \quad OB = OC$$

és a feltevés szerint

$$AB = DC$$

tehát

$$OAB\Delta \cong ODC\Delta$$

s így

$$\angle AOB = \angle DOC.$$

De másrészt

$$\angle JOA = \angle JOD \text{ és } \angle BOK = \angle COK,$$

tehát

$$\angle JOA + \angle AOB + \angle BOK = \angle JOD + \angle DOC + \angle COK.$$

Mínthogy az egy pont körül fekvő szögek összege 360° , ezért

$$\angle JOA + \angle AOB + \angle BOK = 180^\circ$$

vagyis $\angle JOK$ egyenes szög, tehát JO és OK egy ugyanazon egyenesbe esnek. Ha pedig AD és BC ugyanazon JK egyenesre merőlegesek, akkor AD csakugyan párhuzamos BC -vel.