

315. Legyen p_1 és p_2 pozitív szám, $q_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$, $q_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$ (tehát $q_1 + q_2 = 1$). Nevezzük az x_1, x_2 számok p_1 és p_2 , ill. q_1 és q_2 súlyokkal súlyozott számtani-, négyzetes-, illetőleg harmonikus közepének sorra a

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} = q_1 x_1 + q_2 x_2; \quad \sqrt{\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2}{p_1 + p_2}} = \sqrt{q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2};$$

$$\frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2}} = \frac{1}{\frac{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2}}{p_1 + p_2}} = \frac{1}{\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2}}$$

kifejezéseket. Bizonyítsuk be, hogy a súlyozott harmonikus közép nem lehet nagyobb, mint a súlyozott számtani közép, ez pedig nem nagyobb a súlyozott négyzetes középénél. Mikor lehetnek egyenlők?

Írjuk fel a megfelelő egyenlőtlenségeket, ha $p_1 = p_2$, ($q_1 = q_2$).