

Ketten a következő játékot játsszák: felváltva 1000 (pozitív) osztóit mondják, azzal a feltétellel, hogy olyan osztót nem mondhatnak, amelyik egy korábban már mondott osztónak is osztója. Az veszít, aki így magát az 1000-et kénytelen kimondani.

Mutassuk meg, hogy ha a kezdő ügyesen játszik, mindig nyer.

Mi a helyzet akkor, ha úgy módosítják a játékot, hogy olyan osztót nem mondhatnak, aminek kevesebb osztója lenne, mint valamelyik korábban mondott számnak?¹

¹Bizonyítás nélkül szabad felhasználni a következő tételt: Ha egy n természetes szám törzstényezős felbontásában csak a $p_1, p_2, \dots, p_r$ különböző törzstényezők lépnek föl, és pedig rendre az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ kitevővel, akkor az n szám pozitív osztóinak száma $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ – hiszen egy osztóban pl. törzstényező a $0, 1, 2, \dots, \alpha_1$ kitevők mindegyikével előfordulhat.