

Első megoldás. Legyen

$$\sqrt{1+x} = a \quad \text{és} \quad \sqrt{1-x} = b,$$

akkor

$$(a-b)^2 = (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^2} = 2 - 2\sqrt{1-\frac{3}{4}} = 1,$$

tehát

$$a-b=1$$

Továbbá

$$a^2 + b^2 = (1+x) + (1-x) = 2$$

és

$$ab = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} &= \frac{a^2}{1+a} + \frac{b^2}{1-b} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 - ab(a-b)}{1+(a-b)-ab} = \frac{2-\frac{1}{2}}{1+1-\frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Második megoldás. Ha a nevezőket végszerűsítjük, azután a számlálót és nevezőt x -szel megszorozzuk s végre x értékét helyettesítjük, ered:

$$\frac{1}{3} \left[-6 + 2\sqrt{3} \left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + 3 \left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}} - \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) \right].$$

De

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}} \right)^2} = \sqrt{3}$$

és

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}} - \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}} - \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}} \right)^2} = 1,$$

mely értékeket helyettesítve ismét 1-et kapunk eredményül.

(*Basch Rudolf, Budapest.*)

A feladatot még megoldották: Erdős V., Fried E., Koffler B., Szántó L.