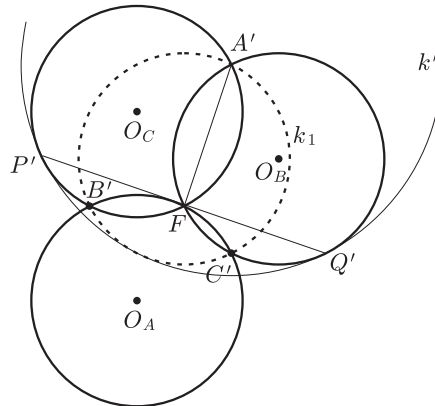


I. megoldás. Alkalmazzunk inverziót az A -val szemközti hozzáírt körre, melynek középpontját F jelöli. Az ABC háromszög oldalai (mivel érintik e kört) mind azonos sugarú körökbe transzformálódnak. Feltehetjük, hogy ez a sugár egységnyi, és a megfelelő körök középpontjai O_A, O_B és O_C . Az ABC körülírt körének a képe az A', B' és C' pontokon átmenő k_1 kör lesz. (A vesszős változat az adott pont inverzió utáni képet jelöli.)

Azt állítjuk, hogy a k_1 kör szintén egységnyi sugarú. O_A, O_B és O_C ugyanis egyaránt egységnyi távolságra vannak az F -től, így a rajtuk átmenő kör sugara is egységnyi. Az $O_A O_B O_C$ háromszög oldalfelezőpontjai által meghatározott háromszög körülírt körének sugara tehát $\frac{1}{2}$. E háromszög csúcsai az FA', FB' és FC' szakaszok felezőpontjai, tehát az említett $\frac{1}{2}$ sugarú kört egy F középp. 2-szeres nagyítás a k_1 -be viszi, mely így csakugyan egységsugarú.



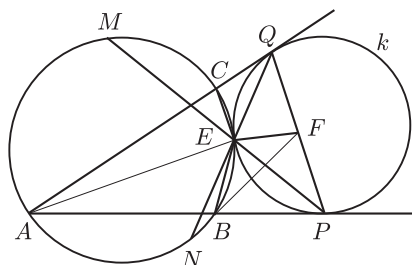
Az A' körüli 2 egység sugarú kör belülről érinti az AB , ill. AC oldalak képeit és a körülírt kör képét is, így e kör éppen k képe lesz az inverzió során. A P', Q' pontok pedig az A' -vel átellenes pontok a megfelelő egységsugarú körökön, ezért $A'FP'$ és $A'FQ'$ egyaránt derékszögek, továbbá F (a szimmetria miatt) felezi $P'Q'$ -t. Mivel F volt az inverzió középpontja, F egyúttal a PQ szakaszt is felezi. $\square$

Megjegyzések. 1. Hasonlóan a tavalyi verseny első feladatához, idén sem volt haszontalan a síkbeli inverzió tulajdonságainak ismerete (jóllehet tavaly többen próbálkoztak az alkalmazásával). A versenybizottság fenntartja magának az inverzióval (is) megoldható példa kitűzésének jogát.

2. A feladat szoros rokonságot mutat az 1978. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kitűzött 4. feladattal. A különbség lényegében annyi, hogy az olimpiai feladatban a k kör *belülről* érintett, és az érintési pontok alkotta szakasz felezőpontja a *beírt* kör középpontja volt. Az említett feladatra megjelent¹ egyik szellemes megoldás ötlete könnyen alkalmazható a mi esetünkre is. Ezt vázoljuk az alábbiakban.

3. Több versenyző próbálkozott az analitikus módszerrel. Természetesen így is teljes értékű megoldás kapható, azonban viszonylag kevesen jártak sikerrel.

II. megoldás. Legyen E a k kör és az ABC háromszög körülírt körének érintési pontja, M , ill. N pedig a PE , ill. QE egyeneseknek és a háromszög körülírt körének E -től különböző metszéspontja. Mivel E -ből a k kört egy középpontos hasonlóság viszi az ABC háromszög körülírt körébe, az M -ben, ill. N -ben a körülírt körhöz húzott érintők párhuzamosak AB -vel, ill. AC -vel. Eszerint M felezi a C -t tartalmazó AB ívet, N pedig felezi a B -t tartalmazó AC ívet.



Felhasználva a kerületi szögek egyenlőségét, illetve hogy feleakkora ívhez feleakkora kerületi szög tartozik

$$\angle MEB = \angle MEA + \angle AEB = \frac{\beta + \alpha}{2} + \gamma = \frac{\pi + \gamma}{2}$$

¹ld. Reiman–Dobos: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–2003* (328–332. oldal)

adódik, ahonnan

$$BEP\angle = \pi - MEB\angle = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

(Felhasználtuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.)

Világos, hogy $ABEC$ húrnégyszög, így a konkáv $BEC\angle$ nagysága $\pi + \alpha$. Legyen F az iménti szög felezőjének és a PQ szakasznak a metszéspontja. Eszerint

$$BEF\angle = \frac{\pi + \alpha}{2}, \quad \text{és} \quad APF\angle = \frac{\pi - \alpha}{2},$$

hiszen az AQP háromszög egyenlő szárú. Azt kaptuk, hogy $FEBP$ húrnégyszög, melyben a PF íven nyugvó kerületi szögre

$$PBF\angle = PEF\angle = BEF\angle - BEP\angle = \frac{\pi + \alpha}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

Az adódott tehát, hogy BF az ABC háromszög B -nél lévő külső szögének a felezője.

A fenti számolás értelemszerű módosításával adódik, hogy CF az ABC háromszög C -nél lévő külső szögfelezője. A két külső szögfelező F metszéspontja egyfelől a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontja, másfelől rajta van az ABC háromszög A -ból induló szögfelezőjén. E szögfelező azonban felezi az egyenlő szárú APQ háromszög alapját, az állítást igazoltuk. $\square$