

Jelölje ezt az n eseményt $A_1, A_2, \dots, A_n$, ekkor $1 \leq i \leq n$ esetén $P(A_i) = \frac{1}{2}$, továbbá $1 \leq i < j \leq n$ esetén $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4}$ teljesül. Legyenek $B_1, \dots, B_k$ olyan páronként diszjunkt események, melyek közül alkalmasak uniója-ként mindegyik A_i előállítható, és azt is tegyük fel, hogy mindegyik B_j szerepel legalább az egyik A_i előállításában. (Ilyenek például az $A'_1 \cap \dots \cap A'_n$ alakban előálló események, ahol A'_i vagy az A_i eseményt, vagy annak komplementerét jelöli, és legalább egy i -re $A'_i = A_i$ teljesül.) Defináljunk minden $1 \leq i \leq n$ esetén egy $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})$ vektort, ahol $a_{ij} = 1$, amennyiben B_j szerepel A_i előállításában (vagyis $B_j \subseteq A_i$), különben pedig $a_{ij} = 0$. Legyen $1 \leq j \leq k$ esetén $P(B_j) = p_j$. Ekkor annak valószínűsége, hogy az $A_1, \dots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik: $p = p_1 + \dots + p_k$.

Tekintsük a következő mennyiséget:

$$S := p_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})^2 + \dots + p_k(a_{1k} + a_{2k} + \dots + a_{nk})^2.$$

Könnyen meggondolhatjuk, hogy

$$S = P(A_1) + \dots + P(A_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Most a súlyozott számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség segítségével alulról becsljük S értékét:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{S}{p}} &\geq \frac{p_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + \dots + p_k(a_{1k} + a_{2k} + \dots + a_{nk})}{p} = \\ &= \frac{P(A_1) + \dots + P(A_n)}{p} = \frac{n}{2p}, \end{aligned}$$

amiből $\frac{n(n+1)}{4} = S \geq \frac{n^2}{4p}$, és így $p \geq \frac{n}{n+1}$.

Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy az $A_1, \dots, A_n$ események közül egyik sem következik be, legfeljebb $\frac{1}{n+1}$.

A feladat (b) részének igazolásához legyen $n = 2^t - 1$, ahol t tetszőleges pozitív egész szám. Dobjunk t -szer egy szabályos pénzérmével, és a dobások halmazának tetszőleges nemüres H részhalmazára legyen A_H az az esemény, hogy a H -beli dobások között páratlan sok fej van. Megmutatjuk, hogy ez az n esemény kielégíti a feltételeket. Legyen először H a dobások halmazának egy nemüres részhalmaza, és legyen $h \in H$. Képzeljük úgy, hogy a h dobás történik utoljára. Ha a $H \setminus \{h\}$ -beli dobások közül páratlan sok lett fej, akkor $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H -beli dobások közül is páratlan sok fej (ha a h dobás írás), ha pedig a $H \setminus \{h\}$ -beli dobások közül páros sok lett fej, akkor szintén $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H -beli dobások között páratlan sok fej (ha a h dobás fej). Ezért $P(A_H) = \frac{1}{2}$. Legyenek most H_1 és H_2 a dobások halmazának különböző nemüres részhalmazai. Feltehetjük, hogy például $H_1 \not\subseteq H_2$, vagyis létezik $h_1 \in H_1 \setminus H_2$. Legyen $h_2 \in H_2$. Képzeljük úgy, hogy a h_1 dobás az utolsó, a h_2 pedig az utolsó előtti. Akármilyen h_1, h_2 előtti dobások eredménye, a h_2 dobás után $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H_2 -beli dobások között páratlan sok fej, és a H_2 -beli fejek számán a h_1 dobás már nem változtat. A h_1 előtti dobások eredményétől függetlenül, az utolsó, h_1 dobás után pedig $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H_1 -beli fejek száma páratlan. Ez azt jelenti, hogy $P(H_1 \cap H_2) = \frac{1}{4}$. Az A_H események közül akkor nem következik be egyik sem, ha az összes dobás eredménye írás, ennek a valószínűsége pedig $\frac{1}{2^t} = \frac{1}{n+1}$. Ezzel a feladat (b) részét is igazoltuk.

Megjegyzés. Tetszőleges páratlan n -re megadható n olyan esemény, amelyek teljesítik a feladatbeli feltételeket úgy, hogy pontosan $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel nem következik be egyik sem. Legyen ugyanis $n = 2k + 1$, és tegyük fel, hogy az eseményeink közül mindig pontosan $k + 1$ következik be, ráadásul bárhogyan is választunk ki $k + 1$ eseményt, azok együttes bekövetkezésének valószínűsége pontosan $p = \frac{k! \cdot k!}{2 \cdot (2k)!}$. Ekkor az A_i esemény bekövetkezésének a valószínűsége

$$P(A_i) = \binom{2k}{k} \cdot p = \frac{(2k)! \cdot k! \cdot k!}{k! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = \frac{1}{2},$$

illetve az A_i és A_j események együttes bekövetkezésének valószínűsége $i \neq j$ esetén

$$P(A_i \cap A_j) = \binom{2k-1}{k-1} \cdot p = \frac{(2k-1)! \cdot k! \cdot k!}{(k-1)! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = \frac{k}{2 \cdot 2k} = \frac{1}{4}.$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy egyik esemény sem következik be éppen

$$\begin{aligned} 1 - \binom{2k+1}{k+1} \cdot p &= 1 - \frac{(2k+1)! \cdot k! \cdot k!}{(k+1)! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = 1 - \frac{2k+1}{2 \cdot (k+1)} = \\ &= 1 - \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$