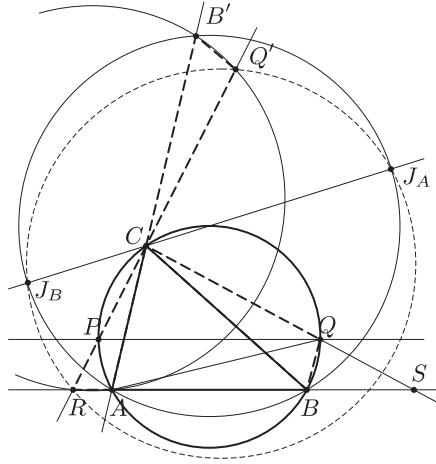


Megoldás (Gyarmati Máté megoldása alapján).

A $BCQ\triangleleft$ és $BAQ\triangleleft$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, $BAQ\triangleleft$ és $PQA\triangleleft$ váltószögek, valamint $PQA\triangleleft$ és $PCA\triangleleft$ szintén azonos íven nyugvó kerületi szögek.



Innen

$$BCQ\triangleleft = BAQ\triangleleft = PQA\triangleleft = PCA\triangleleft$$

adódik. Ezen kívül $RAC\triangleleft = BQC\triangleleft$, hiszen $ABQC$ húrnégyszög. Tehát $RAC\triangleleft \sim BQC\triangleleft$, hisz két-két szögük egyforma, így $CRA\triangleleft = CBQ\triangleleft$ is teljesül.

Legyenek B' és Q' rendre a B , illetve Q pontok tükörképei a $J_A J_B$ egyenesre. Világos, hogy

$$J_B A J_A \triangleleft = J_B A C \triangleleft + C A J_A \triangleleft = \frac{1}{2}(RAC\triangleleft + CAB\triangleleft) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

és hasonlóan

$$J_B B J_A \triangleleft = J_B B C \triangleleft + C B J_A \triangleleft = \frac{1}{2}(ABC\triangleleft + CBS\triangleleft) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

ahol S a CQ és AB metszéspontja. A tükrözés miatt tehát J_A, A, B, J_B és B' egy körön ($J_A J_B$ Thalesz-körén) vannak. Ezen kívül J_B és J_A egyaránt rajta vannak az ABC háromszög C -nél lévő külső szögfelezőjén, ezért a B csúcs B' tükörképe az AC egyenesre illeszkedik. Korábban láttuk, illetve a tükrözés miatt $RCA\triangleleft = QCB\triangleleft = Q'CB'\triangleleft$, így R, C és Q' is egy egyenesre esnek. Ezek szerint

$$RAB'\triangleleft = RAC\triangleleft = BQC\triangleleft = B'Q'C\triangleleft = B'Q'R\triangleleft,$$

tehát az R, A, Q' és B' pontok is húrnégyszöget alkotnak.

A $J_B ABB'$ és $RAQ'B'$ körök hatványvonala AB' , a $J_B ABB'$ és $J_B R J_A$ körök hatványvonala pedig $J_A J_B$. E három kör hatványpontja pedig a két hatványvonal metszéspontja, C . Tehát a C pont hatványa az $RAQ'B'$ körre $|\overline{CR}| \cdot |\overline{CQ'}|$, és ez megegyezik a $J_A R J_B$ körre vett hatvánnyal. Mivel R az utóbbi körön fekszik, Q' -nek is illeszkednie kell e körre, tehát $J_A R J_B Q'$ húrnégyszög. Innen

$$180^\circ = J_A R J_B \triangleleft + J_A Q' J_B \triangleleft = J_A R J_B \triangleleft + J_A Q J_B \triangleleft,$$

és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk.

Megjegyzés. A feladat állítása akkor is teljesül, ha a PQ húrról nem tesszük fel, hogy metszi az AC és BC oldalszakaszokat. Ez az általánosítás több, egymástól lényegesen nem különböző eset gondos vizsgálatával a fentiekhez hasonlóan igazolható. A bizottság nem kívánta ezzel terhelni a versenyzőket, ezért döntött a speciális eset kitűzése mellett.