

*Segédállítás:* Nyolc egymást követő egész szám közül legfeljebb kettő választható ki úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám különbsége ne legyen prím.

*Bizonyítás:* Bármely két kiválasztott szám különbsége 1, 4 vagy 6 (mivel 8 egymást követő számról van szó és a különbség nem lehet 2, 3, 5 vagy 7). Tegyük fel, hogy ki tudunk választani hármat úgy, hogy bármelyik kettő különbsége 1, 4 vagy 6. Legyenek ezek a számok  $a < b < c$  és legyenek  $x = b - a$ ,  $y = c - b$ . Ilyenkor  $x$ ,  $y$ , és  $x + y$  is az 1, 4, 6 számok valamelyike. Ez nem lehetséges. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem tudunk kiválasztani három számot.

Az első 2022 pozitív egész számot feloszthatjuk 252 ilyen 8-as csoportra (1–8, 9–16, ..., 2009–2016) és egy 6-os csoportra (2017–2022). Egyik csoportból sem választhatunk ki 2-nél több számot. Így összesen nem választhatunk ki  $2 \cdot 253 = 506$ -nál több számot.

Példa 506-ra: 4-gyel osztva 1 maradékot adó számok (bármely 2 különbsége osztható 4-gyel, így nem lehet prím). Így legfeljebb 506 számot választhatunk ki.

*Kovács Alex* (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. évf.)

*Megjegyzések.* 1. Egy tipikus hiba az volt, hogy a megoldó a helyes konstrukcióból indult ki ( $4k + 1$  alakú számok halmaza), és azt mondta, hogy több elemet már nem lehet kiválasztani ebből a halmazból. Ez hibás érvelés, mert pl. ha mohó algoritmussal elkezdjük kiválasztani a legkisebb számot, amit még bevehetünk, akkor az  $\{1, 2, 10, 11, \dots\}$  halmazt kapjuk. Így viszont lényegesen kevesebb elemet választunk ki, mint 506, azonban további elemet már nem tudunk a listánkhoz adni.

2. Szintén hasonló hiba, hogy feltették, hogy periodikusan kell kiválasztani a számokat.

3. Egy másik tipikus hiba, hogy lényegében csak annyit mondtak, hogy ha van két szomszédos szám, akkor utána van legalább hét nem kiválasztható szám. Ez az érvelés azonban nem zárja ki azt az esetet, hogy a választott számok halmaza az  $\{1, 5, \dots, 2021, 2022\}$ .