I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon, legyen $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$. A belső szögfelező tétele szerint

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{CA} = \frac{c}{b}.$$

Eszerint van olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy a BD és DC szakaszok hosszára

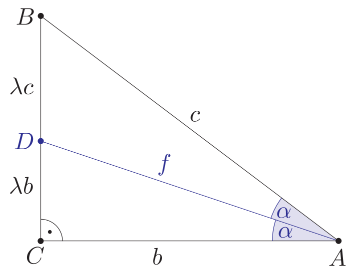
$$BD = \lambda c, \quad DC = \lambda b \tag{1}$$

teljesül. Tekintsük az *1. ábrát.*

Az ABC derékszögű háromszögben felírhatjuk, hogy $\cos 2\alpha = \dfrac{b}{c}$, az ADC derékszögű háromszögben pedig $\cos\alpha = \dfrac{b}{f}$, illetve $\sin\alpha = \dfrac{\lambda b}{f}$.

Felhasználjuk a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ trigonometrikus azonosságot, ezzel

$$\frac{b}{c} = \frac{b^2}{f^2} - \frac{\lambda^2 b^2}{f^2} = \frac{b^2 - \lambda^2 b^2}{f^2}. \tag{2}$$



1. ábra

A (2) egyenlet jobb oldalát átalakítjuk:

$$\frac{b}{c} = \frac{(b-\lambda b)(b+\lambda b)}{f^2} = \frac{b(1-\lambda)(b+\lambda b)}{f^2},$$

ahonnan b-vel való osztás és rendezés után $f^2 = (c - \lambda c)(b + \lambda b)$ következik.

Nyilvánvaló, hogy az ABD háromszögben a D csúcsnál tompaszög van, ezért $c > \lambda c$, vagyis $c - \lambda c > 0$, másrészt $b + \lambda b > 0$, tehát

$$f = \sqrt{(c-\lambda c)(b+\lambda b)}. \tag{3}$$

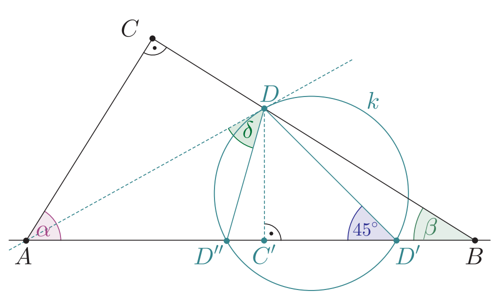
Mivel $c - \lambda c = AB - BD$, illetve $b + \lambda b = AC + CD$, ezért a (3) egyenlet éppen azt jelenti, amit bizonyítani akartunk:

$$f = \sqrt{(AB - BD)(AC + CD)},$$

tehát az $AB - BD$ és $AC + CD$ szakaszok hosszának mértani közepe valóban az f szögfelező hossza.

Sipeki Márton (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimnázium, 11. évf.)

II. megoldás. Bocsássunk merőlegest a D pontból az AB átfogóra, a merőleges talppontja legyen C'. Az AB egyenesére mérjük föl a C' pontból kiindulva a B irányába a $C'D' = CD$ szakaszt, a B pontból kiindulva az A pont felé a $BD'' = BD$ szakaszt.



2. ábra

Tekintsük a *2. ábrát.* Az AD szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a szögszáraktól, ezért $CD = C'D$, és így $C'D' = C'D$, tehát $D'DC'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. A szögfelező egy másik tulajdonsága szerint a $CAB\sphericalangle$ szárain az AC és AC' szakaszok is egyenlő hosszúak.

A D' és D'' pontok konstrukciójából az előzőek szerint következik, hogy

$$AD' = AC' + C'D' = AC + CD; \quad AD'' = AB - BD'' = AB - BD. \tag{4}$$

A $DD''D'$ háromszög, és ezzel annak k körülírt köre mindig létrejön, ez csak akkor nem lenne lehetséges, ha a D'' és D' pontok azonosak lennének. Ez azonban azt jelentené, hogy $AD'' = AD'$, amiből (4) alapján az következne, hogy $AC + CD = AB - BD$, azaz $AB = AC + CD + BD = AC + BC$, de ez az ABC háromszögre felírt háromszög-egyenlőtlenség miatt lehetetlen.

Bizonyítani fogjuk, hogy a 2. ábrán jelölt $ADD''\sphericalangle$ szögre $\delta = 45°$.

Nyilvánvaló, hogy

$$ADC\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

a BDD'' háromszögben pedig $BD = BD''$, emiatt

$$BDD''\sphericalangle = BD''D\sphericalangle = \frac{180° - \beta}{2},$$

felírhatjuk tehát, hogy

$$90° - \frac{\alpha}{2} + \delta + \frac{180° - \beta}{2} = 180°. \tag{5}$$

A (5) egyenletben a műveletek elvégzésével és $\alpha + \beta = 90°$ felhasználásával valóban azt kapjuk, hogy $\delta = 45°$.

A k körben a DD'' húrhoz 45°-os kerületi szög tartozik, a δ szög egyik szára a DD'' szakasz, így $\delta = 45°$ csak úgy lehetséges, hogy a δ szög AD szára a k kör érintője.

A körhöz húzott szelő- és érintőszakaszok tételéből következik, hogy $AD^2 = AD' \cdot AD''$, amelyből (4) szerint

$$AD^2 = (AC + CD) \cdot (AB - BD),$$

ebből pedig négyzetgyökvonás után a feladat állítása adódik.

Megjegyzés. A D' pont az AB egyenesen a B ponton túl is elhelyezkedhet, ez azonban a megoldást menetét nem befolyásolja, mert a (2) összefüggés ebben az esetben is felírható.

Jármai Roland (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., (10. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Tükrözzük a D pontot a B csúcsból induló BE belső szögfelezőre, a szögfelező tulajdonsága miatt a D' tükörkép az AB átfogó belső pontja. Jelöljük meg továbbá az AC egyenesen, a C ponton túl azt a D'' pontot, amelyre $CD'' = CD$.

Mivel a tükrözés miatt $BD = BD'$, ezért egyrészt $AD' = AB - BD$, másrészt $AD'' = AC + CD$.

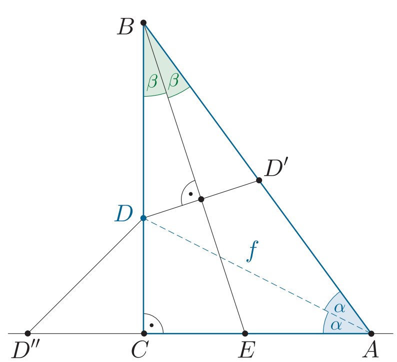
A *3. ábra* jelöléseivel $2\alpha + 2\beta = 90°$, így $\alpha + \beta = 45°$. Egyszerűen belátható, hogy $BD'D\sphericalangle = 90° - \beta$, és ezért

$$AD'D\sphericalangle = 90° + \beta.$$

A $DD''C$ egyenlő szárú, derékszögű háromszög, tehát $D''DC\sphericalangle = 45°$, és mivel $ADC\sphericalangle = 90° - \alpha$, ezért

$$ADD''\sphericalangle = 90° - \alpha + 45°,$$

ebből $\alpha + \beta = 45°$ alapján $ADD''\sphericalangle = 90° + \beta$ következik.



3. ábra

Az $AD'D$ és ADD'' háromszögek két-két szögének nagysága α és $90^\circ+\beta$, így a háromszögek harmadik szöge is nyilván megegyezik, ez pedig azt jelenti, hogy a két háromszög hasonló. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért

$$\frac{AD'}{AD}=\frac{AD}{AD''}, \quad \text{azaz} \quad AD^2=AD'\cdot AD''.$$

Mivel $AD=f$, $AD'=AB-BD$, illetve $AD''=AC+CD$, előző eredményünkből $f^2=(AB-BD)\cdot(AC+CD)$ következik, ez éppen a feladat állítása, hiszen ebből a nyilvánvalóan pozitív $AB-BD$ és $AC+CD$ számok mértani közepe:

$$f=\sqrt{(AB-BD)\cdot(AC+CD)}.$$

(A KöMaL-honlapon is megtalálható a II. megoldás)