

I. megoldás. Sem α , sem β nem derékszög, különben a föltevésnek nem volna értelme; továbbá $\operatorname{tg} \gamma/2 > 0$, hiszen $\gamma/2$ hegyesszög. Így (1)-et szorozva $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma/2$ -vel, és tagjait a és b szerint rendezve

$$a \cos \beta (\cos \alpha \cos \gamma/2 - \sin \alpha \sin \gamma/2) + b \cos \alpha (\cos \beta \cos \gamma/2 - \sin \beta \sin \gamma/2) = 0.$$

A zárójelekre az addíció-tételt alkalmazva látjuk, hogy egyik a másiknak -1 -szerese, hiszen bennük $\alpha + \gamma/2$ és $\beta + \gamma/2$ koszinusza áll, és e két szög egymás kiegészítő szöge. A föltevés így alakul:

$$\cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) (a \cos \beta - b \cos \alpha) = 0,$$

ami szerint legalább az egyik teljesül a

$$(2) \quad \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = 0,$$

$$(3) \quad a \cos \beta = b \cos \alpha$$

egyenlőségek közül.

Mármint (2)-ből $\alpha + \gamma/2$ derékszög, így $\beta + \gamma/2$ is az, tehát (2) csak $\alpha = \beta$ esetén teljesül. (3) két oldala pedig a háromszög C -ből húzott magassága C_1 talppontjának B -től, ill. A -tól vett távolsága, s mivel a $BC_1 = AC_1$ egyenlőség az AB egyenes pontjai közül csak az AB oldal felezőpontjára teljesül, ACC_1 és BCC_1 egybevágó derékszögű háromszögek, $AC = BC$. Ezek szerint az ABC háromszög mindenképpen egyenlő szárú.

Gyarmati Erzsébet (Budapest, Radnóti M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. (3)-ból a szinusz-tétel alkalmazásával is haladhatunk tovább:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \sin(\alpha - \beta) = 0, \quad \alpha = \beta.$$

II. megoldás. (1) szimmetriája miatt választhatjuk a betűzést úgy, hogy $\alpha \geq \beta$, azaz $a \geq b$ legyen. Nem lehet α tompaszög, különben

$$90^\circ > 180^\circ - \alpha = \beta + \gamma > \beta$$

miatt

$$|\operatorname{tg} \alpha| > \operatorname{tg} \beta \quad \text{s} \quad |a \operatorname{tg} \alpha| > b \operatorname{tg} \beta,$$

és (1) jobb oldala negatív lenne, holott bal oldala pozitív. Derékszög sem lehet α , mert akkor a jobb oldalnak nem lenne értelme.

Megmutatjuk, hogy a $90^\circ > \alpha > \beta$ föltevést (1)-hez csatolva ellentmondásra jutunk. Ekkor $a > b$, $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$, így $(a - b)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) > 0$ -ból kifejtéssel:

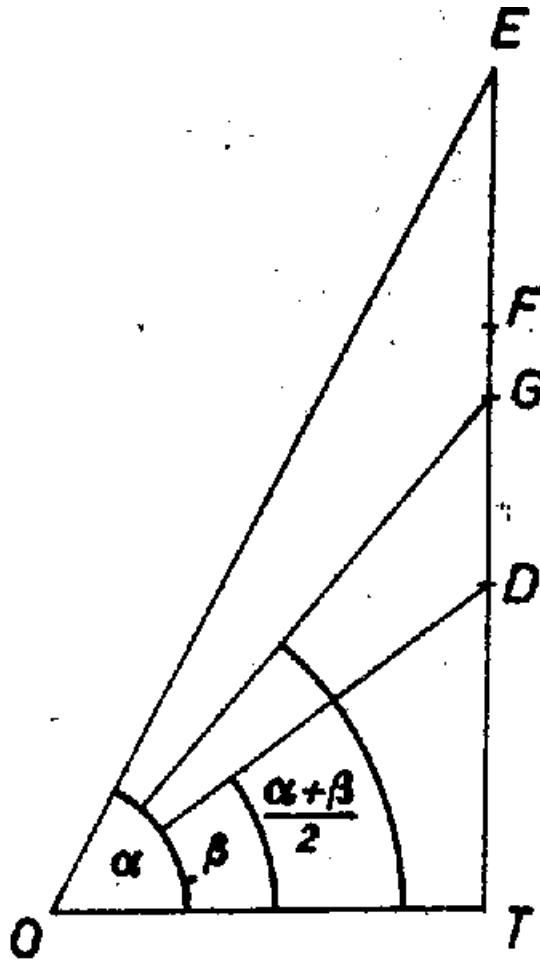
$$a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta > a \operatorname{tg} \beta + b \operatorname{tg} \alpha.$$

Adjuk hozzá mindkét oldalhoz a bal oldalt – így a jobb oldal szorzattá alakítható –, és osszuk az egyenlőtlenséget $2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta)/2$ -vel. Ekkor a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)/2 = 1/\operatorname{tg}(\gamma/2)$ azonosságra tekintettel a bal oldalon (1) jobb oldala áll:

$$\begin{aligned} 2(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta) &> (a + b)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta), \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta) &= a + b > (a + b) \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}, \end{aligned}$$

tehát

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} > \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2}.$$



1. ábra

Mérjük föl egy T csúcsú derékszög egyik szárára a $TO = 1$ szakaszt, majd az OT egyenes ugyanazon oldalára $TOD\angle = \beta$, $TOE\angle = \alpha$ és $TOG\angle = (\alpha + \beta)/2$ szöget, ahol D , E , G rendre az új szár metszéspontja a derékszög másik szárával. Mivel $(\alpha + \beta)/2$ ugyancsak hegyesszög, (4) szerint

$$TG > \frac{TE + TD}{2} = TF, \quad DG > DF,$$

ahol F a DE szakasz felezőpontja. Ez azonban lehetetlen, mert $OD < OE$, így az ODE háromszögben $ODE\angle > 90^\circ$ miatt $OE > OD$, OG felezi a DOE szöget, és így

$$\frac{DG}{GE} = \frac{OD}{OE} < 1, \quad DG < GE, \quad DG < \frac{DE}{2} = DF.$$

Ezt akartuk bizonyítani. Eszerint (1) csak $\alpha = \beta$ esetén teljesülhet. Ekkor viszont teljesül is, hiszen így $\gamma/2$ pótszöge α -nak és β -nak, $\operatorname{tg} \gamma/2$ reciproka $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ -nak.

Sugár László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Trigonometriai azonosságok alapján bizonyítjuk, hogy (4) lehetetlen. A jobb oldal így alakítható:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta} &= \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} [1 + \cos(\alpha + \beta)]}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}, \end{aligned}$$

így a bal és jobb oldal különbsége, kiemeléssel

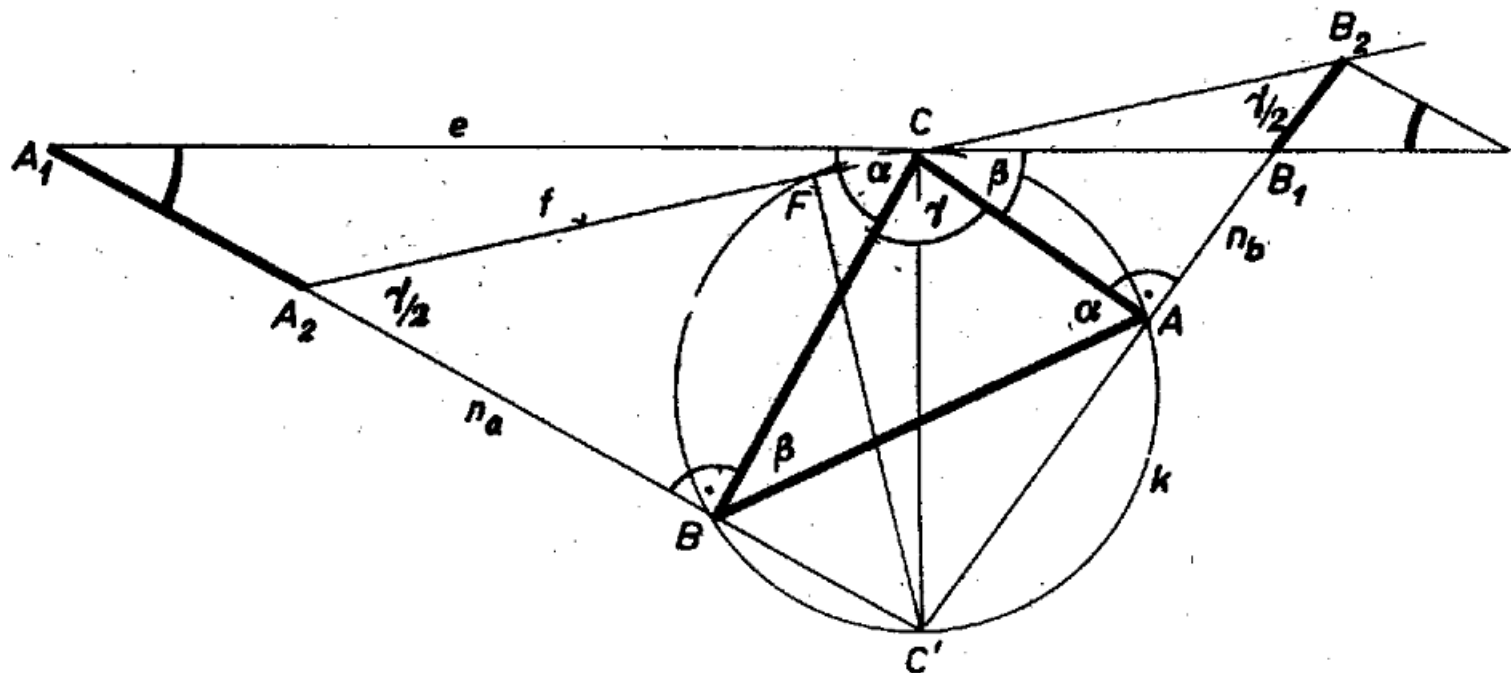
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \left(1 - \frac{1 + \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} \right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta) - 1}{2 \cos \alpha \cos \beta} > 0.$$

Eszerint, mivel a nevező tényezői pozitívak, $\cos(\alpha - \beta) > 1$, ami lehetetlen.

III. megoldás. Felhasználjuk a II. megoldásból, hogy α és β hegyesszögek. Azt mutatjuk meg, hogy $\alpha > \beta$ esetén az (1)-ből átrendezéssel adódó

$$(5) \quad a \left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \right) = b \left(\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \beta \right)$$

egyenlőség bal oldala nagyobb a jobb oldalánál.



2. ábra

Rajzoljuk meg az ABC háromszög C csúcsában a külső szög f felezőjét, és k körülírt kör e érintőjét, valamint a C -vel k -ban átellenes C' pontot A -val és B -vel összekötő n_b , ill. n_a egyenest. e és f különbözők, mert f metszi k -t, a C -t tartalmazó AB ív F felezőpontjában, ami C -től különböző (különben ugyanis $\alpha = \beta$ lenne); F az A -t nem tartalmazó BC ív pontja. C' a C -t nem tartalmazó AB ív belső pontja, különben nem állhatna $\alpha, \beta < 90^\circ$, n_a merőleges CB -re, n_b pedig CA -ra. Legyen n_a és n_b metszéspontja e -vel A_1 , ill. B_1 , f -fel A_2 , ill. B_2 . Fennáll

$$A_1CB_{\triangleleft} = \alpha, \quad B_1CA_{\triangleleft} = \beta, \quad C'A_2B_2_{\triangleleft} = C'B_2A_2_{\triangleleft} = \gamma/2,$$

utóbbiak azért, mert $C'A_2B_2$ egyenlő szárú háromszög, ugyanis C' -nél levő szögét felezi a $C'F$ egyenes, és A_2B_2 oldala merőleges erre, továbbá a C' -nél levő szöge $180^\circ - \gamma$.

A keletkezett derékszögű háromszögek felhasználásával

$$A_1 A_2 = A_1 B - A_2 B = a \left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \right)$$

$$B_1 B_2 = B_2 A - B_1 A = b \left(\cotg \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \beta \right),$$

azaz (5) bal, ill. jobb oldala. Messe a B_2 -n átmenő, n_a -val párhuzamos egyenes f -et B' -ben. Ekkor $A_1A_2 > B'B_2$, ugyanis CA_1A_2 és $CB'B_2$ hasonló háromszögek, és bennük $CA_2 > CB_2$, mert – mint láttuk – F felezi A_2B_2 -t, és C az FB_2 szakasz belső pontja. Másrészt $B_1B_2 < B'B_2$, mert a B_1B_2B' háromszög velük szemben fekvő szögeire

$$B_1B'B_2\triangleleft = CA_1B\triangleleft = 90^\circ - \alpha < 90^\circ - \beta = B'B_1B_2\triangleleft.$$

Így valóban $A_1A_2 > B_1B_2$, amit bizonyítani akartunk.

Azt viszont hogy $\alpha = \beta < 90^\circ$ esetén teljesül (1), a II. megoldásban beláttuk.