

Az autó hurkon való áthaladásának kritikus pontja a pálya legfelső pontja. Ha itt a nyomóerő éppen nullára csökken, akkor még nem válik el az autó a pályától. A körmozgás feltétele, hogy a testre ható erők eredője létrehozza a centripetális gyorsulást. Ha a játékautó sebessége a pálya legfelső pontjában v_1 , akkor határesetben (amikor a test még *éppen* nem válik el a kör alakú pályától):

$$mg = m \frac{v_1^2}{r}, \quad \text{tehát} \quad v_1^2 = rg.$$

A folyamat során a disszipatív erők hatása elhanyagolható, így a mechanikai energia megmarad.

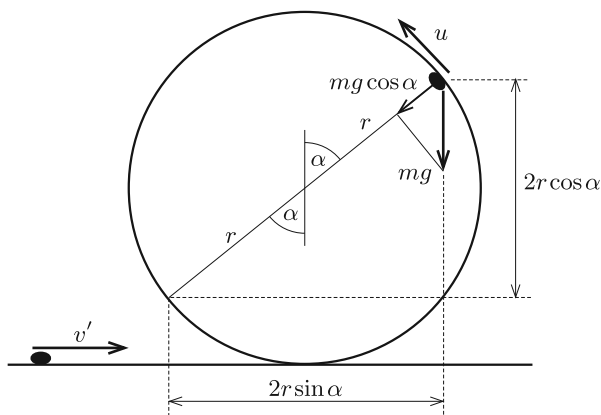
$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mgr + \frac{1}{2}mv_1^2 = 2mgr + \frac{1}{2}mgr = \frac{5}{2}mgr,$$

vagyis

$$v = \sqrt{5rg}.$$

Az autó a körmozgás második negyedében tud leválni a pályájáról (előtte – nem elegendően nagy kezdősebességnél – csak visszacsúszna a körívén). Legyen a leváláskor a játékautó sebessége u , a hozzá húzott sugár függőlegessel bezárt szöge α (lásd az *ábrát*). Ekkor még éppen körpályán halad (a pálya nyomóereje már éppen nullára csökkent), így a mozgásegyenlet sugár irányú komponense:

$$mg \cos \alpha = m \frac{u^2}{r}, \quad \text{vagyis} \quad u^2 = rg \cos \alpha.$$



A szemközti pontba való becsapódásáig mozgása ferde hajítás.

Vízszintesen:

$$2r \sin \alpha = u_x t = ut \cos \alpha, \quad \text{azaz} \quad t = \frac{2r \sin \alpha}{u \cos \alpha}.$$

Függőlegesen:

$$2r \cos \alpha = \frac{g}{2}t^2 - ut \sin \alpha.$$

A t -re és u^2 -re kapott kifejezések behelyettesítésével, majd $2r$ -rel egyszerűsítve kapjuk:

$$\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0.$$

Innen (a trigonometrikus Pitagorasz-tételt kihasználva):

$$\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 0, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tehát

$$\alpha = 45^\circ.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = (1 + \cos \alpha)mgr + \frac{1}{2}mu^2,$$

$$v'^2 = (2 + \sqrt{2})rg + rg \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$v' = \sqrt{\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)rg},$$

és végül a keresett arány:

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{2}{5} + \frac{3\sqrt{2}}{10}} \approx 0,91.$$

Horváth Anikó (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 11. évf.)