

Belátjuk, hogy ha $[x + \sqrt{x}] = a_i$, akkor $a_{i-1} = x$. Az x -re igaz a rekurzív feltétel, továbbá $y > x$ -re $[y + \sqrt{y}] > [x + \sqrt{x}]$ (a lineáris rész 1-gyel nő, a gyökös rész szigorúan monoton nő), $y < x$ -re $[y + \sqrt{y}] < [x + \sqrt{x}]$, tehát x az egyetlen lehetőség: a sorozat bármelyik eleme tehát egyértelműen meghatározza a korábbiakat.

Így megkeresve a számokat, a sorozat korábbi, 2019 előtti elemei sorrendben: 1805, 1847, 1889, 1932, 1975, 2019, melyek egyike sem négyzetszám (gyökeik megközelítő értéke rendre: 42,4853; 42,9767; 43,4626; 43,9545; 44,441; 44,9333). Mivel $1764 + \sqrt{1764} > 1805$, $1763 + \sqrt{1763} < 1805$, valóban nincs korábbi eleme a sorozatnak. Így a korábbi tagok között nincs négyzetszám.

Megmutatjuk, hogy ha van egy négyzetszám a sorozatban, akkor a sorozat egy alkalmas későbbi eleme is négyzetszám, tehát végtelen sok négyzetszám van a sorozatban. Pontosabban: Ha $a_i = b^2$, akkor $a_{i+2b+1} = (2b)^2$. Ugyanis a sorozat következő három eleme rendre $a_{i+1} = b^2 + b$, $a_{i+2} = b^2 + 2b$, $a_{i+3} = b^2 + 3b$ lesz (hiszen $b^2 + \sqrt{b^2} = b^2 + b$, $b^2 < b^2 + b < b^2 + 2b < b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$, és így $b^2 + b$ és $b^2 + 2b$ gyökének egész része is b). Azaz $a_{i+3} = (b+1)^2 + b - 1$. A c -re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy $a_{i+1+2c} = (b+c)^2 + b - c$, ha $0 < c < b+1$. Ez $c = 1$ -re igaz; tegyük fel, hogy $a_{i+1+2c} = (b+c)^2 + b - c$. Ekkor

$$a_{i+1+2c+1} = (b+c)^2 + b - c + b + c = (b+c)^2 + 2b$$

és

$$a_{i+1+2c+2} = a_{i+1+2(c+1)} = (b+c)^2 + 2b + b + c = (b+c+1)^2 + b - (c+1)$$

(hiszen $(b+c)^2 + b - c < (b+c)^2 + 2b < (b+c)^2 + 2b + 2c + 1 = (b+c+1)^2$). Tehát az állítás teljesül $(c+1)$ -re is. Helyettesítsünk be $c = b$ -t, ezzel megkapjuk a fenti állítást.

A sorozat elemei 2019 után: 2019, 2063, 2108, 2153, 2199, 2245, 2292, 2339, 2387, 2435, 2484, 2533, 2583, 2633, 2684, 2735, 2787, 2839, 2892, 2945, 2999, 3053, 3108, 3163, 3219, 3275, 3332, 3389, 3447, 3505, 3564, 3623, 3683, 3743, 3804, 3865, 3927, 3989, 4052, 4115, 4179, 4243, 4308, 4373, 4439, 4505, 4572, 4639, 4707, 4775, 4844, 4913, 4983, 5053, 5124, 5195, 5267, 5339, 5412, 5485, 5559, 5633, 5708, 5783, 5859, 5935, 6012, 6089, 6167, 6245, 6324, 6403, 6483, 6563, 6644, 6725, 6807, 6889.

Mivel $6889 = 83^2$, a fentiek szerint végtelen sok négyzetszám van a sorozatban.

Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. évf.)