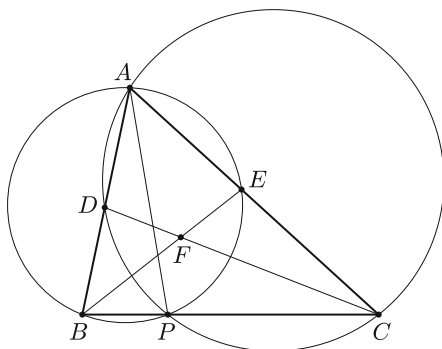


I. megoldás. Legyen a BC egyenes és az $AEB\Delta$ köréírt körének B -től különböző metszéspontja P .



A C pontnak erre a körre vonatkozó hatvánnya $CP \cdot BC = CE \cdot CA$.

Tudjuk, hogy $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$. Utóbbi egyenletből kivonva előbbit, azt kapjuk, hogy

$$BC \cdot (BC - CP) = BD \cdot BA.$$

Viszont $BC - CP = BP$, így $BP \cdot BC = BD \cdot BA$.

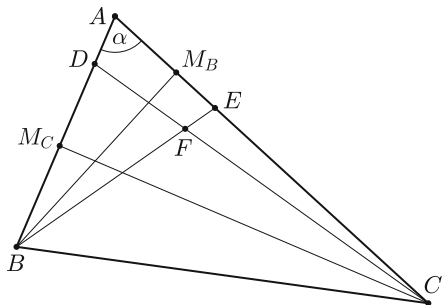
Az egyenlet jobb oldala a B pontnak az $ADC\Delta$ köréírt körére vonatkozó hatványa. Ezek szerint az egyenlőség miatt P raita van az $ADC\Delta$ köréírt körén is.

Legyen $APC\measuredangle = \varphi$. Ekkor kerületi szögek egyenlősége miatt az $ADPC$ körön $ADC\measuredangle = APC\measuredangle = \varphi$. Tudjuk, hogy $APB\measuredangle = 180^\circ - \varphi$. Az $ABPE$ körön a kerületi szögek miatt $AEB\measuredangle = APB\measuredangle = 180^\circ - \varphi$. Így $ADF\measuredangle = ADC\measuredangle = \varphi$ és $AEF\measuredangle = AEB\measuredangle = 180^\circ - \varphi$, mivel D, F, C , illetve E, F, B egy egyenesen vannak. Ezek szerint $ADF\measuredangle + AEF\measuredangle = 180^\circ$, tehát $ADFE$ valóban húrnégyszög, hiszen két szemközti szögének összege 180° .

Diszkusszió: Akkor lehetne probléma az ábrával – és így a bizonyítással is –, hogyha az $AEB\Delta$ köréírt köre érinti BC -t, vagy pedig a BC szakaszon kívül metszi másodszor. A C -ből felírt hatvány a körre ekkor is helyes lesz, így $CE \cdot CA = CP \cdot BC$ teljesülni fog. Hogyha a BC szakaszon kívül metszi a kör az egyenest, az csak B -n túl lehet, így ha P „rossz” helyen van, akkor $CP \geq BC$ teljesülni fog. Ennek alapján $CP \cdot BC \geq BC^2$, így a $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$ egyenletben $BD \cdot BA \leq 0$, ami nyilvánvalóan nem lehetséges, mert ekkor D nem belső pontja lenne az AB oldalnak. Ezek szerint a feltétel alapján a P pont a BC szakasz belső pontja, az ábra mindig megfelelő, és a bizonyítás helyes.

Tóth Balázs (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen az ABC háromszög A -nál fekvő belső szöge α , a B -ből, illetve C -ből induló magasságvonalak talppontjai pedig M_B és M_C .



A BC oldalra felírt koszinusztételből:

$$BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos \alpha,$$

valamint a feltétel szerint:

$$(2) \quad BC^2 = CA \cdot CE + BD \cdot BA.$$

(1) és (2) különbségéből:

$$0 = CA(CA - CE) + BA(BA - BD) - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos \alpha,$$

$$0 = AE \cdot CA + AD \cdot BA - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos \alpha.$$

Rendezés után:

$$(3) \quad 2 \cos \alpha = \frac{AE}{BA} + \frac{AD}{CA}.$$

Másrészt az ACM_C és ABM_B derékszögű háromszögekből $\cos \alpha$ -t kifejezve:

$$(4) \quad 2 \cos \alpha = \frac{M_CA}{CA} + \frac{M_BA}{BA}.$$

(3) és (4) különbsége alapján:

$$(5) \quad \frac{AE - M_BA}{AB} = \frac{M_CA - AD}{AC},$$

$$\frac{EM_B}{AB} = \frac{DM_C}{AC}.$$

Átrendezés után $\sin \alpha$ -val bővítve:

$$\frac{DM_C}{EM_B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC \cdot \sin \alpha}{AB \cdot \sin \alpha} = \frac{CM_C}{BM_B}.$$

Ez azt jelenti, hogy a DM_CC és EM_BB derékszögű háromszögek hasonlóak, a megfelelő szögek egyenlők: $M_CDC \sphericalangle = M_BEB \sphericalangle$. Mivel $M_BEB \sphericalangle = AEF \sphericalangle$, és az $M_CDC \sphericalangle$ mellékszöge $FDA \sphericalangle$, így

$$AEF \sphericalangle + FDA \sphericalangle = 180^\circ,$$

azaz $AEFD$ valóban húrnégyszög.

Ha a D és M_C pontok egybeesnek, akkor (5) miatt az E és M_B pontok is egybeesnek, az $ADFE$ négyszög két szemközti szöge derékszög, tehát ekkor is húrnégyszöget kapunk.

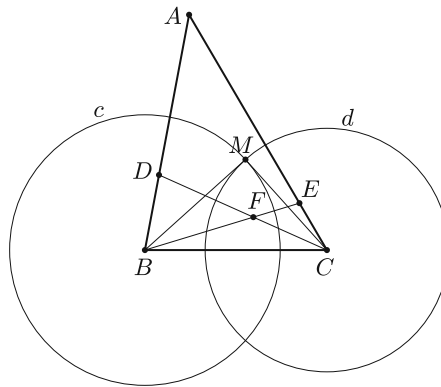
Kocsis Anett (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Tekintsük a B középpontú, $\sqrt{BD \cdot BA} = r_1$ sugarú c ; és a C középpontú, $\sqrt{CE \cdot CA} = r_2$ sugarú d köröket. Ezekre a körökre invertálva az A pontot kapjuk a D és az E pontot, mivel úgy választottuk meg a sugarakat, hogy ez teljesüljön.

A feladatban szereplő feltétel szerint

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA = r_1^2 + r_2^2,$$

tehát a Pitagorasz-tétel megfordítása értelmében a BCM háromszög derékszögű, vagyis a két kör bezárt szöge (ami a metszéspontjukba húzott érintők bezárt szöge) 90° . Ebben az esetben, ha valamelyik körre invertáljuk a másik kört, akkor annak a képe önmaga lesz, tehát invariáns alakzat. Ezeket felhasználva láthatjuk, hogy ha D -t invertáljuk a d , valamint E -t a c körre, akkor képeiknek egybe kell esniük, ez pedig csak a két egyenes metszéspontjában lehetséges, amit az *ábrán* F -fel jelöltünk.



Látható, hogy ebben az esetben $BD \cdot BA = r_1^2 = BF \cdot BE$, azaz a BDF és BAE háromszögek hasonlóak, tehát $DFB \sphericalangle = BAE \sphericalangle$.

Ekkor az $ADFE$ négyszög valóban húrnégyszög lesz, hiszen a szemközti szögeinek összege 180° . Ezzel állításunkat beláttuk.

Tubak Dániel (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A megoldás csak a következő tétel alkalmazásával teljes: Két inverzió sorrendje pontosan akkor cserélhető fel, ha az alapkörök merőlegesen metszik egymást.

Esetünkben az A pont c körre vonatkozó inverze a D pont, majd ennek a d -re vonatkozó inverze rajta van a CD egyenesen. Másrészt az A pont d -re vonatkozó inverze az E pont, majd ennek inverze a c -re a BE egyenesen van. Ha a két inverzió felcserélhető, akkor valóban csak a két egyenes metszéspontja, az F pont lehet a közös kétszeres inverz.

Váoljuk az inverziók sorrendjére vonatkozó tétel bizonyítását.

Az inverzió szögtartó. Ebből következően az inverzió inverziótartó: ha P és Q egymás képei az i körre való inverziónál, és P' , Q' , i' ezek képei a j körre való inverziónál, akkor P' és Q' egymás képei az i' -re való inverziónál. Valóban, P és Q pontosan akkor egymás képei i -nél, ha a P -n is és Q -n is átmenő körök valamennyien merőlegesek i -re – ez a tulajdonság pedig megmarad, ha j -re invertálunk.

Tehát ha az i_1 , i_2 körökre való inverziók kommutativitását vizsgáljuk, akkor áttranszformálhatjuk őket egy inverzióval, a transzformációk megmaradnak, kommutativitásuk ott is vizsgálható.

Két metsző körre vonatkozó inverzió két metsző egyenesre vonatkozó tükrözéssé változik, ha a két kör metszéspontja körüli inverziót alkalmazunk.

A szögtartás miatt akkor és csak akkor cserélhető fel a tükrözések sorrendje, ha a két egyenes merőleges egymásra.