

I. megoldás. Ha $n \leq 2$, akkor nyilván $k = 1$, hiszen a gráfban nem lehet irányított kör.

Tegyük fel ezután, hogy $n \geq 3$. Ekkor $k \geq 2$, mivel például egy irányított n hosszú kör megfelelő színezéséhez legalább két szín szükséges. Megmutatjuk, hogy $k = 2$ szín már mindig elegendő. Számozzuk meg a gráf csúcsait az $1, 2, \dots, n$ számokkal, és egy i csúcsból egy j csúcsba mutató irányított él legyen piros, ha $i < j$, és legyen kék, ha $i > j$. Ekkor, ha az $i_1, i_2, \dots, i_t$ csúcsok ebben a sorrendben egy egyszínű irányított kör csúcsai lennének, akkor vagy $i_1 < i_2 < \dots < i_t < i_1$ -nek, vagy $i_1 > i_2 > \dots > i_t > i_1$ -nek kellene teljesülnie, azonban világos, hogy ezek egyike sem állhat fenn. Ezzel mutattunk olyan színezést 2 színnel, ami megfelelő.

Tehát $n = 1, 2$ esetén $k = 1$, $n \geq 3$ esetén pedig $k = 2$.

II. megoldás. Az n szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $n \geq 3$ esetén $k = 2$. A kezdeti feltételek nyilvánvalóan teljesülnek. Tegyük fel, hogy az állítás minden n csúcsú gráfra igaz, és tekintsünk egy $n + 1$ csúcsú gráfot. Válasszuk ki ennek egyik, P csúcsát. A P csúcsot és a vele szomszédos éleket elhagyva, a kapott n csúcsú gráf az indukciós feltevés szerint megfelelően kiszínezhető két színnel. A P -vel szomszédos élek közül pedig a P -be menőket színezzük pirosra, a P -ből indulókat pedig kékre. Így az egész gráf színezése megfelelő: ha egy irányított kör nem megy át P -n, akkor az indukciós feltevés szerint nem lehet egyszínű. Ha pedig átmegy P -n, akkor tartalmaz egy P -be menő és egy P -ből induló élt is, és ezek különböző színűek.

Argay Zsolt (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Egy szín biztosan nem lesz elég, hiszen lehet a gráfban irányított kör. Megmutatjuk, hogy egyébként pedig két szín elég lesz. Kezdjük el az egyik színnel (piros) beszínezni az éleket, és legyen a színezésünk olyan értelemben maximális, hogy jelenleg még nincs piros irányított kör, de ha bármelyik további élt színeznénk pirosra, akkor már lenne. Színezzük ezért a többi élt kékre. Megmutatjuk, hogy ekkor nincs kék irányított kör. Tegyük fel indirekt, hogy van kék irányított kör: $B_1, B_2, \dots, B_t, B_1$. A $B_i B_{i+1}$ él nem lévén piros, a B_{i+1} -et B_i -vel irányított piros út köti össze (minden $i = 1, \dots, t$ -re). Legyen ez az út: $B_{i+1} A_1^i A_2^i \dots A_{k_i}^i B_i$. Tekintsük a következő piros irányított utakat:

$$(B_1 A_1^t A_2^t \dots A_{k_t}^t B_t), (B_t A_1^{t-1} A_2^{t-1} \dots A_{k_{t-1}}^{t-1} B_{t-1}), \dots, (B_2 A_1^1 A_2^1 \dots A_{k_1}^1 B_1).$$

Ezeket összefűzve egy piros irányított kört kapunk a B_v csúcsokon keresztül. Elképzelhető, hogy az összefűzött utaknak volt közös csúcsa vagy éle, de ez csak annyit jelent, hogy több piros irányított kört is kaptunk. Ez azonban ellentmond a piros szín használatával kapcsolatban megfogalmazott feltételünknek, azaz ellentmondásra jutottunk, tehát bizonyításunk teljes.

Kerekes Boldizsár (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)