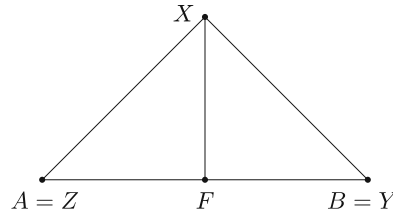


Készítsünk ábrát geogebra-ban, hátha megsejtünk valamit. A netes megoldás az alábbi oldalon található, és ott letölthető egy geogebra fájl, melyben a Z pont mozgatható az AF szakaszon:
<https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=C1549&l=hu>.

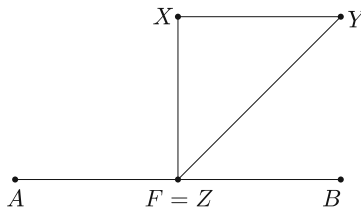
Ez alapján az a sejtés, hogy a kérdéses szög értéke 45° , illetve az XYZ háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Bizonyítsuk ezt be.

Ha a Z pont az A pontba esik, akkor az Y pont a B ponttal egyezik meg, és az XZY háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, $\angle XZY = 45^\circ$ (1. ábra).



1. ábra

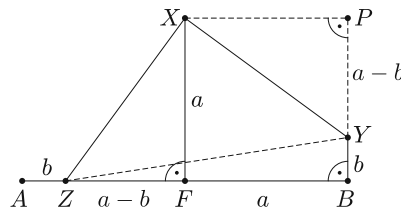
Ha a Z pont az F pontba esik, akkor az $XZBY$ négyszög négyzet, az XZY háromszög ekkor is egyenlő szárú derékszögű háromszög, és $\angle XZY = 45^\circ$ (2. ábra).



2. ábra

Ha a Z pont máshol helyezkedik el, arra az esetre adunk három megoldást. A honlapon két, ezektől különböző megoldás olvasható.

I. megoldás. Állítsunk merőlegest az X pontból a BY egyenesre, a talppontot jelölje P . Az $FBPX$ négyszög négyzet, mert három szöge derékszög és $FB = FX = a$. Ezért $PB = a$, és így $PY = a - b$ (3. ábra).



3. ábra

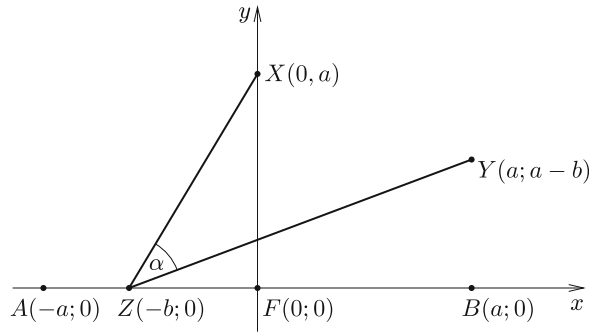
Mivel $PY = FZ = a - b$, $PX = FX = a$ és $\angle YPX = \angle ZFX = 90^\circ$, ezért az YPX és a ZFX háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy $XY = XZ$ és $\angle YXP = \angle ZXF$. Innen adódik, hogy

$$90^\circ = \angle FXP = \angle FXY + \angle YXP = \angle FXY + \angle ZXF = \angle ZXP,$$

és így

$$\angle XZY = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

II. megoldás. Helyezzük az ábrát koordináarendszerbe úgy, hogy az F pont az origóban legyen, az A pont koordinátája $(-a; 0)$, a Z ponté pedig $(-b; 0)$. Ekkor a B pont koordinátái $(a; 0)$, az Y ponté pedig $(a; a - b)$ (4. ábra).



4. ábra

Írjuk fel a $\overrightarrow{ZX}$ és $\overrightarrow{ZY}$ vektorok skalárszorzatát kétféleképpen. Mivel $\overrightarrow{ZX} = (b; a)$ és $\overrightarrow{ZY} = (a+b; a-b)$, ezért egyrészt

$$\overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{ZY} = b(a+b) + a(a-b) = ab + b^2 + a^2 - ab = a^2 + b^2.$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{ZY} &= \sqrt{b^2 + a^2} \cdot \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} \cdot \cos \alpha = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)} \cdot \cos \alpha = \sqrt{2}(a^2 + b^2) \cos \alpha. \end{aligned}$$

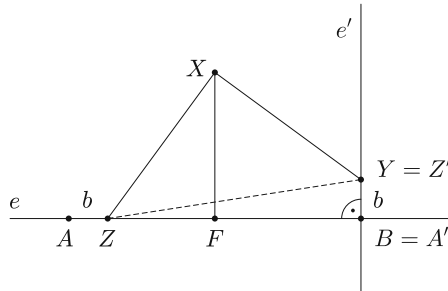
A kétfajta felírás egyenlő egymással:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(a^2 + b^2) \cos \alpha &= a^2 + b^2, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \alpha &= 45^\circ, \end{aligned}$$

miel 0° és 90° között van.

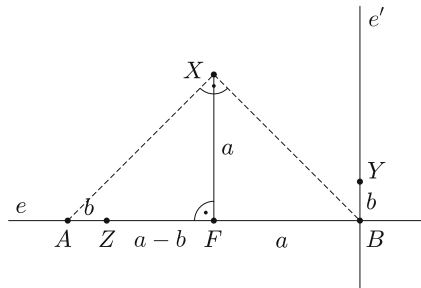
Gál Bence (Szolnok, Varga Katalin Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Mivel $FA = FX = FB$ és $\angle AFX = 90^\circ$, ezért az ABX háromszög egy $2a$ átlójú négyzet fele, $XA = XB$ és $\angle AXB = 90^\circ$ (5. ábra).



5. ábra

Forgassuk el az $e := AB$ egyenest az X pont körül 90° -kal. A kapott e' egyenes merőleges lesz az e egyenesre, így megegyezik a feladatban B -ben állított AB -re merőleges egyenessel (6. ábra).



6. ábra

Mivel $AX = BX$ és $\angle AXB = 90^\circ$, ezért a forgatás során A képe B lesz. Tudjuk, hogy $b = AZ = A'Z' = BY$, így Z képe $Y = Z'$. Mivel a forgatás távolságtartó, így $XZ = XZ' = XY$, és mivel 90 fokkal forgattunk, így $\angle ZXX' = \angle ZXY = 90^\circ$. Tehát az XZY egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, és így a keresett szög, $\angle XZY = 45^\circ$.