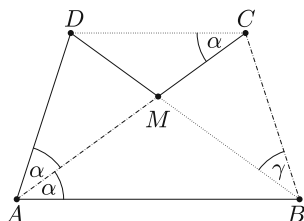


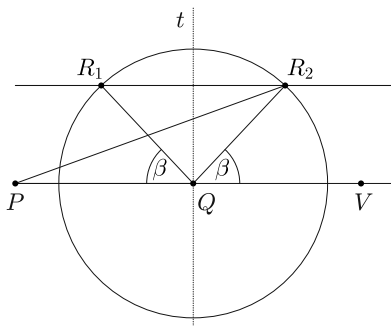
A trapéz alapjain fekvő  $CAB\angle$  és  $ACD\angle$  szögek váltószögek, tehát egyenlők. Emiatt az  $ACD$  háromszög egyenlő szárú. A trapéz ismert tulajdonsága, hogy az  $AMD$  és  $BCM$  háromszögek területe egyenlő. Azt is tudjuk a feladat feltételei, illetve az előbbi szögegyenlőség alapján, hogy  $AM = BC$ , továbbá  $BM = CD = DA$ . Vagyis az  $AMD$  és  $BCM$  háromszögeknek nem csak a területük egyezik meg, hanem két-két oldaluk is (1. ábra).



1. ábra

Belátjuk, hogy ez a két háromszög egybevágó is.

Ehhez először azt vizsgáljuk meg, hogy hány olyan nem egybevágó háromszög van, amelynek két-két oldala és területe megegyezik. Ha adott a terület, akkor ismerjük az adott oldalakhoz tartozó magasságokat is. Ha felvesszük az egyik adott oldalt ( $PQ$ ) és az ismert hozzátartozó magassággal párhuzamost húzunk ezzel az oldallal, akkor biztos, hogy a háromszög harmadik csúcsa csak ezen a párhuzamos egyenesen helyezkedhet el. A harmadik csúcs ( $R$ ) ezen kívül rajta van az adott szakasz egyik végpontja mint középpont körül rajzolt, a másik adott oldal hosszúságával megegyező sugarú körvonalon. A párhuzamos egyenes és a körvonal egymást legfeljebb két pontban metszi ( $R_1, R_2$ ) a 2. ábra szerint. (A másik párhuzamos egyenes berajzolása, a végpontok és a körüljárás felcserélése nem vezet ezektől eltérő megoldásra.)



2. ábra

A kör középpontjában a  $PQ$  egyenesre állított merőleges egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el az  $R_1Q$  és  $R_2Q$  szakaszok, ezért  $PQR_1\angle = VQR_2\angle$ , tehát a  $PQR_1$  és  $PQR_2$  szögek, ha nem egyenlők, akkor  $180^\circ$ -ra egészítik ki egymást.

Most térjünk vissza az  $AMD$  és  $BCM$  háromszögek vizsgálatához. Előfordulhat-e itt, hogy az első ábrán  $\alpha$ -val és  $\gamma$ -val jelölt szögek kiegészítő szögek? A szögek elhelyezkedése alapján  $\alpha = ACD\angle < BCD\angle$  és  $\gamma = DBC\angle < ABC\angle$ , így ekkor

$$180^\circ = \alpha + \gamma < BCD\angle + ABC\angle$$

lenne, ez pedig ellentmondás, mert az  $ABCD$  trapéz  $B$ -hez és  $C$ -hez tartozó szögei  $180^\circ$ -ra egészítik ki egymást. Az  $\alpha$  és  $\gamma$  szögek tehát ugyanakkorák.

Innen a megoldás már néhány lépésben befejezhető. Beláttuk tehát, hogy  $DAM\triangle \cong MBC\triangle$ . Az  $AMD$  és  $BMC$  szögek csúcshökök, ezek is egyenlők, vagyis  $ADM\angle = BMC\angle = AMD\angle = BCM\angle$ . Ez a két háromszög tehát egyenlő szárú is. A  $DMC$  háromszög is egyenlő szárú, ennek a háromszögnek külső szöge a  $DMA\angle$ , amely ezek szerint  $2\alpha$  nagyságú. Az  $AMD$  egyenlő szárú háromszög szögeire

$$MAD\angle + AMD\angle + MDA\angle = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ.$$

Innen  $\alpha = 36^\circ$ , végül az  $ABCD$  trapéz szögei  $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$ .

Fleiner Zsigmond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)  
dolgozata alapján