

Vegyük  $a$  és  $b$  harmonikus közepét:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Látható, hogy a feladatban a logaritmusok argumentumaként szereplő értékeket kapjuk.

Legyen  $c$  egy valós szám, melyre teljesül, hogy  $0 < c < 1$ . Ekkor az  $f(x) = \log_c(x)$  függvény szigorúan monoton csökkenő, de helyettesítési értéke a  $]0, 1[$  tartományon végig pozitív marad, hiszen  $x = 1$ -re  $f(x) = f(1) = \log_c(1) = 0$ . Mivel a függvény szigorúan monoton csökken, ezért ha  $x_1 \leq x_2$ , akkor  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha  $x_1 = x_2$ .

A nevezetes közepekre való összefüggés szerint két pozitív szám mértani közepe nem kisebb azok harmonikus közepénél. Ez  $a$ -ra és  $b$ -re a következőt jelenti:  $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ . Mivel  $a$  és  $b$  1-nél kisebb pozitív számok, ez (a fentiek alapján) azt jelenti, hogy

$$\log_a(\sqrt{ab}) \leq \log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \quad \text{és} \quad \log_b(\sqrt{ab}) \leq \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Mivel (a fentiek alapján) tudjuk, hogy mind a négy logaritmusos kifejezés értéke pozitív, felírhatjuk, hogy

$$\log_a(\sqrt{ab}) \log_b(\sqrt{ab}) \leq \log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Így tehát elég belátnunk, hogy  $\log_a(\sqrt{ab}) \log_b(\sqrt{ab}) \geq 1$ , hiszen ekkor a feladatban szereplő egyenlőtlenség is teljesül.

Tegyük fel, hogy  $\log_a(\sqrt{ab}) \log_b(\sqrt{ab}) \geq 1$ . Ekvivalens átalakításokat használva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_a(ab) \cdot \frac{1}{2} \log_b(ab) &\geq 1, \\ \log_a(ab) \log_b(ab) &\geq 4, \\ (\log_a a + \log_a b)(\log_b a + \log_b b) &\geq 4, \\ (1 + \log_a b)(\log_b a + 1) &\geq 4, \\ \log_b a + 1 + \log_a b \log_b a + \log_a b &\geq 4, \\ \log_a b + \log_b a + \log_a b \log_b a &\geq 3. \end{aligned}$$

Az ismert összefüggés szerint  $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$ . Ezt felhasználva az egyenlőtlenség tovább alakítható:

$$\begin{aligned} \log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 1 &\geq 3, \\ \log_a b + \frac{1}{\log_a b} &\geq 2, \\ (\log_a b)^2 - 2\log_a b + 1 &\geq 0, \\ (\log_a b - 1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Egy valós szám négyzete mindig nemnegatív, így ez az egyenlőtlenség mindig teljesül. Egyenlőség  $\log_a b = 1$  esetén áll fenn. Ekkor  $a = b$ .

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a feladatban szereplő egyenlőtlenség is minden esetben teljesül, és egyenlőség  $a = b$  esetén áll fenn.

Mészáros Márton (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.)