

A gáztörvény szerint $pV = nRT$, tehát a gáz hőmérséklete a pV szorzattal arányos. A hőmérséklet az A pontnak megfelelő állapotban a legalacsonyabb:

$$T_{\min} = \frac{p_0 V_0}{nR}.$$

Az ABC háromszög szimmetriája miatt a legmagasabb hőmérséklet a BC szakasz felezőpontjához tartozik:

$$T_{\max} = \left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)^2 \frac{p_0 V_0}{nR}.$$

A feladat szövege szerint $T_{\max} = 9T_{\min}$, vagyis $\lambda = 5$.

A körfolyamat hatásfoka a gáz által végzett hasznos W' munka és a felvett hő hányadosa. A gáz által végzett hasznos munka az ABC háromszög területe:

$$W' = \frac{(\lambda - 1)^2 p_0 V_0}{2} = 8p_0 V_0.$$

Az $A \rightarrow B$ folyamat izochor, amely során felvett hő:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2} (p_B V_B - p_A V_A) = 6p_0 V_0.$$

A $C \rightarrow A$ izobár folyamatban a gáz biztosan *hőt ad le*, így ez a folyamat a körfolyamat hatásfoka szempontjából érdektelen. Nehezebb eset a $B \rightarrow C$ folyamat, amely során hőfelvétel és hőleadás egyaránt előfordulhat.

Tekintsük az AB szakasz valamely D pontját, amelyhez tartozó nyomás p és a térfogat V . (Nyilván $V_0 \leq V \leq 5V_0$.) Mivel D rajta fekszik az egyenesen, teljesül, hogy

$$p = p_0 \left(6 - \frac{V}{V_0}\right),$$

ami az $x = \frac{V}{V_0}$ dimenziótlán arányszám bevezetésével így írható:

$$p = p_0(6 - x).$$

Számítsuk ki, mennyit hőt kell közölnünk a gázzal, hogy az a B állapotból az egyenes mentén haladva a D állapotba jusson. A folyamat során addig történik folyamatosan hőfelvétel, amíg a $Q_{BD} \equiv f(x)$ függvény monoton növekszik. Ha $f(x)$ -nek valahol lokális maximuma van, majd onnan kezdve monoton csökken, akkor ott már hőleadás történik.

A belső energia megváltozása:

$$\Delta U_{BD} = \frac{3}{2} (p_D V_D - p_B V_B) = \frac{3}{2} p_0 V_0 (-x^2 + 6x - 5).$$

A gáz által eközben végzett munka (a BD szakasz és a V tengely közötti trapéz területe):

$$W'_{BD} = p_0 V_0 \frac{5 + (6 - x)}{2} (x - 1).$$

Az első főtétel szerint a gáz által a $B \rightarrow D$ állapotváltozás során felvett hő:

$$Q_{BD} = \Delta U_{BD} + W'_{BD} = (-2x^2 + 15x - 13)p_0 V_0,$$

amit

$$Q_{BD} = (x - 1)(13 - 2x)p_0 V_0$$

alakban is felírhatunk. Ez a függvény egy olyan parabolát ír le, amelynek zérushelyei: $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{13}{2}$. A parabola maximuma

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{15}{4}$$

értéknél van, és ezen a helyen

$$Q_{BD} = \frac{121}{8} p_0 V_0.$$

A teljes körfolyamatban a gáz az $A \rightarrow B \rightarrow D$ állapotváltozás során vesz fel hőt:

$$Q_{\text{fel}} = Q_{AB} + Q_{BD} = \frac{169}{8} p_0 V_0.$$

Így a kérdéses hatásfok:

$$\eta = \frac{W'}{Q_{\text{fel}}} = \frac{64}{169} \approx 0,38 = 38\%.$$