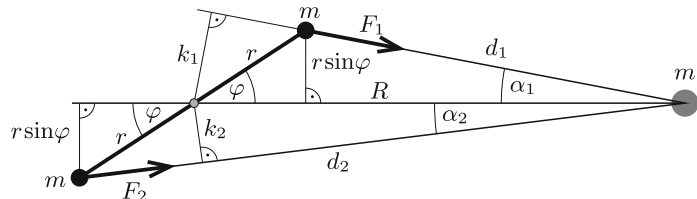


a) Jelölje az ólomgolyóhoz közelebbi testre vonatkozó mennyiségeket 1-es, a távolabbi test jellemzőit pedig 2-es index, a feladat szövegében szereplő φ pedig legyen az 1. ábrán látható szög ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$).



1. ábra

Az m^* tömegű golyó középpontjának az egyes tömegektől mért távolsága a koszinusztételből számolható ki:

$$d_1 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \varphi},$$

$$d_2 = \sqrt{R^2 + r^2 + 2rR \cos \varphi}.$$

A forgatónyomatékot a gravitációs erő hozza létre, amelynek iránya m^* felé mutat, nagysága:

$$F_{1,2} = \gamma \frac{mm^*}{d_{1,2}^2}.$$

Az ólomgolyótól nézve a testek (a rúd középpontjának irányától mérve) akkora α_1 és α_2 szög alatt látszanak, melyekre – a szinusztétel alapján – teljesül:

$$\sin \alpha_{1,2} = \frac{r}{d_{1,2}} \sin \varphi,$$

és a megfelelő erőkarok:

$$k_{1,2} = R \sin \alpha_{1,2} = \frac{Rr}{d_{1,2}} \sin \varphi.$$

A forgatónyomatékok ellentétes irányúak, de nem egyforma nagyságúak, emiatt nem „oltják ki” egymást. Az eredő forgatónyomaték nagysága:

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= F_1 k_1 - F_2 k_2 = \gamma \frac{mm^*}{d_1^2} \cdot \frac{rR}{d_1} \sin \varphi - \gamma \frac{mm^*}{d_2^2} \cdot \frac{rR}{d_2} \sin \varphi = \\ &= \gamma mm^* rR \cdot \sin \varphi \left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3} \right). \end{aligned}$$

Tehát a forgatónyomaték φ szögtől való függése:

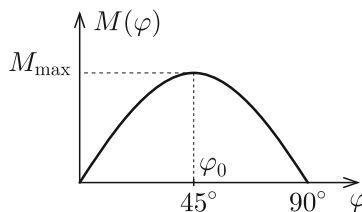
$$M(\varphi) = \gamma mm^* rR \cdot \sin \varphi \left((R^2 + r^2 - 2rR \cos \varphi)^{-\frac{3}{2}} - (R^2 + r^2 + 2rR \cos \varphi)^{-\frac{3}{2}} \right),$$

ami a megadott tömegek és távolságok behelyettesítése után

$$M(\varphi) = 1,20 \cdot 10^{-10} \sin \varphi \left((9,04 - 1,2 \cdot \cos \varphi)^{-\frac{3}{2}} - (9,04 + 1,2 \cdot \cos \varphi)^{-\frac{3}{2}} \right) \text{ Nm.}$$

b) A kapott függvényt ábrázolhatjuk pl. a *GeoGebra* segítségével (2. ábra), és leolvashatjuk, hogy a legnagyobb forgatónyomaték $\varphi = 44,7^\circ \approx 45^\circ$ -nál lép fel, és a nagysága $M_{\max} = 8,9 \cdot 10^{-13} \text{ Nm}$.

A forgatónyomaték iránya olyan, hogy a rudat a $\varphi = 0$ helyzetbe igyekszik beforgatni.



2. ábra