

I. megoldás. Legyen $AB = a$ és $CD = c$. A CE_2F_1 és a CAB háromszögek hasonlóak, mivel $\angle ACB = \angle E_2CF_1$, valamint

$$\frac{CE_2}{CA} = \frac{CE_2}{CE_2 + E_2A} = \frac{1}{\frac{CE_2 + E_2A}{CE_2}} = \frac{1}{1 + \frac{E_2A}{CE_2}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{c}} = \frac{1}{\frac{c+a}{c}} = \frac{c}{c+a}$$

és

$$\frac{CF_1}{CB} = \frac{CF_1}{CF_1 + F_1B} = \frac{1}{\frac{CF_1 + F_1B}{CF_1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_1B}{CF_1}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{c}} = \frac{1}{\frac{c+a}{c}} = \frac{c}{c+a}.$$

Így $\frac{E_2F_1}{AB} = \frac{CE_2}{CA} = \frac{c}{c+a}$, tehát $E_2F_1 = \frac{c}{c+a} \cdot a = \frac{ac}{c+a}$.

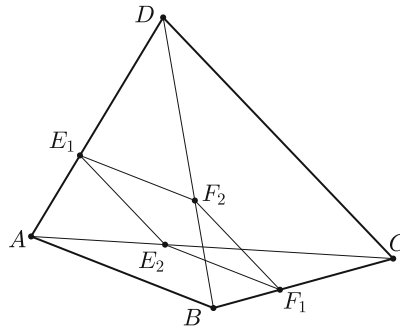
A fentiekhez hasonlóan $\frac{CE_2}{CA} = \frac{CF_1}{CB} = \frac{DE_1}{DA} = \frac{DF_2}{DB}$. Ezt és a megfelelő szögek egyenlőségét felhasználva:

- (1) $CE_2F_1\Delta \sim CAB\Delta$,
- (2) $E_1AE_2\Delta \sim DAC\Delta$,
- (3) $F_2BF_1\Delta \sim DBC\Delta$,
- (4) $DE_1F_2\Delta \sim DAB\Delta$.

(1) és (4) esetében a hasonlósági arány $\frac{c}{c+a}$, így $E_1F_2 = E_2F_1 = a \cdot \frac{c}{c+a} = \frac{ac}{c+a}$.

(2) és (3) esetében a hasonlósági arány $\frac{a}{c+a}$, így $E_1E_2 = F_1F_2 = c \cdot \frac{a}{c+a} = \frac{ac}{c+a}$.

Tehát $E_1E_2F_1F_2$ rombusz, ezért az átlói merőlegesek egymásra (1. ábra).

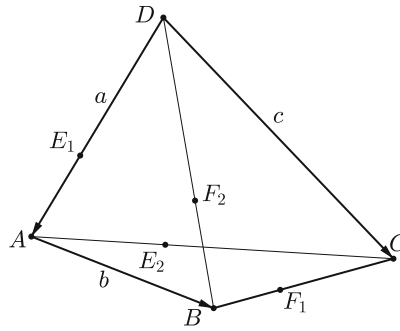


1. ábra

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 8. évf.)

II. megoldás. Célunk belátni, hogy az $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ vektorok merőlegesek egymásra, ami pontosan akkor teljesül, ha a skaláris szorzatuk 0.

Jelölje a $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ vektorokat rendre **a**, **c**, illetve **b**, hosszukat a megfelelő kisbetű; legyen továbbá $\frac{b}{b+c} = \beta$ (2. ábra).



2. ábra

Ekkor

$$\overrightarrow{CE_2} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CE_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{BF_1} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AC} = -\mathbf{a} + \mathbf{c},$$

ezért

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE_2} &= \beta \overrightarrow{AC} = -\beta \mathbf{a} + \beta \mathbf{c}, \\ \overrightarrow{AF_2} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF_2} = \mathbf{b} + \beta \overrightarrow{BD} = \mathbf{b} + \beta(-\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -\beta \mathbf{a} + (1 - \beta) \mathbf{b},\end{aligned}$$

így $\overrightarrow{E_2F_2} = \overrightarrow{AF_2} - \overrightarrow{AE_2} = (-\beta \mathbf{a} + (1 - \beta) \mathbf{b}) - (-\beta \mathbf{a} + \beta \mathbf{c}) = (1 - \beta) \mathbf{b} - \beta \mathbf{c}$. Hasonlóan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF_1} &= \beta \overrightarrow{BC} = \beta(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) = \beta \mathbf{c} - \beta(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\beta \mathbf{a} - \beta \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}, \\ \overrightarrow{BE_1} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE_1} = -\mathbf{b} - \beta \mathbf{a},\end{aligned}$$

ezért $\overrightarrow{E_1F_1} = \overrightarrow{BF_1} - \overrightarrow{BE_1} = (1 - \beta) \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}$. Felírva $\overrightarrow{E_1F_1}$ és $\overrightarrow{E_2F_2}$ skaláris szorzatát:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_1F_1} \cdot \overrightarrow{E_2F_2} &= ((1 - \beta) \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}) \cdot ((1 - \beta) \mathbf{b} - \beta \mathbf{c}) = (1 - \beta)^2 b^2 - \beta^2 c^2 = \\ &= \left(\frac{b + c - b}{b + c} \right)^2 b^2 - \left(\frac{b}{b + c} \right)^2 c^2 = \frac{c^2 b^2}{(b + c)^2} - \frac{b^2 c^2}{(b + c)^2} = 0.\end{aligned}$$

Tehát a két vektor skaláris szorzata 0, vagyis merőlegesek egymásra.