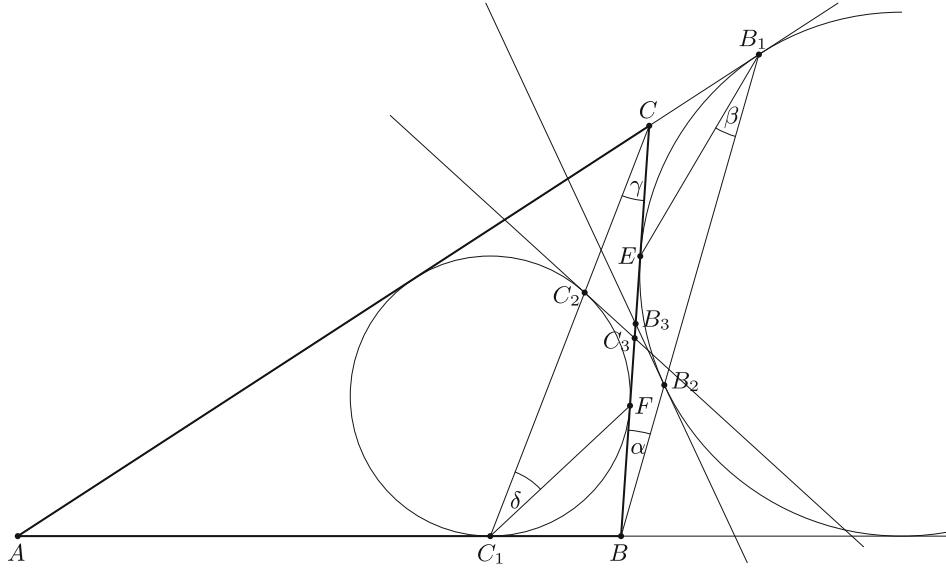


Az A -val szemközti hozzáírt kör és a beírt kör érintsék a BC oldalt rendre az E és F pontokban. Legyen $B_1BC \sphericalangle = \alpha$, $EB_1B_2 \sphericalangle = \beta$. A B_3EB_2 a hozzáírt körön a B_2E ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög, így $B_3EB_2 \sphericalangle = EB_1B_2 \sphericalangle = \beta$, és hasonlóan $EB_2B_3 \sphericalangle = \beta$. Így $BB_3B_2 \sphericalangle = 2\beta$, ezért $BB_2B_3 \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - 2\beta$. Innen $EB_2B_1 \sphericalangle = 180^\circ - BB_2B_3 \sphericalangle - EB_2B_3 \sphericalangle$ miatt $EB_2B_1 \sphericalangle = \alpha + \beta$ adódik. Ez a hozzáírt körön a rövidebb EB_1 ívhez tartozó kerületi szög, ami egyenlő az ehhez az ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekkel, tehát $CEB_1 \sphericalangle = CB_1E \sphericalangle = \alpha + \beta$, és így $B_1CE \sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Könnyű látni azt is, hogy $BB_1C \sphericalangle = EB_1B_2 \sphericalangle + EB_1C \sphericalangle = \beta + (\alpha + \beta) = \alpha + 2\beta$.



Írjuk fel ezután a szinuszételt a BB_2B_3 és a BCB_1 háromszögekre:

$$\frac{BB_3}{B_3E} = \frac{BB_3}{B_3B_2} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - 2\beta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin \alpha},$$

$$\frac{BC}{CB_1} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin \alpha};$$

ezekből $\frac{BB_3}{B_3E} = \frac{BC}{CB_1}$, így $\frac{BE}{B_3E} = \frac{BB_3 + B_3E}{B_3E} = \frac{BB_3}{B_3E} + 1 = \frac{BC}{CB_1} + 1$, ezért (a szokásos jelölésekkel)

$$B_2B_3 = B_3E = \frac{BE}{\frac{BC}{CB_1} + 1} = \frac{s - c}{\frac{a}{s-b} + 1}.$$

Hasonlóan, legyen $C_2CC_3 \sphericalangle = \gamma$, $CC_1F \sphericalangle = \delta$. Ekkor a rövidebbik C_2F ívhez tartozó érintőszárú kerületi szögekként $C_3C_2F \sphericalangle = C_3FC_2 \sphericalangle = \delta$, ezért $C_2C_3C \sphericalangle = 2\delta$, így $CC_2C_3 \sphericalangle = 180^\circ - (\gamma + 2\delta)$,

$$C_1C_2F \sphericalangle = 180^\circ - CC_2F \sphericalangle = 180^\circ - (CC_2C_3 \sphericalangle + \delta) =$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - (\gamma + 2\delta) + \delta) = \gamma + \delta.$$

Innen $C_2FC_1 \sphericalangle = 180^\circ - (\gamma + 2\delta)$, $BC_1F \sphericalangle = BFC_1 \sphericalangle = \gamma + \delta$, tehát $BC_1C \sphericalangle = BC_1F \sphericalangle + \delta = \gamma + 2\delta$.

Írjuk fel a szinuszételt, ezúttal a CC_2C_3 és a CC_1B háromszögekre:

$$\frac{CC_3}{C_2C_3} = \frac{\sin(\gamma + 2\delta)}{\sin \gamma}, \quad \frac{BC}{BC_1} = \frac{\sin(\gamma + 2\delta)}{\sin \gamma},$$

ezért $\frac{CC_3}{C_3F} = \frac{CC_3}{C_2C_3} = \frac{BC}{BC_1}$, $\frac{CF}{C_3F} = \frac{CC_3 + C_3F}{C_3F} = \frac{CC_3}{C_3F} + 1 = \frac{BC}{BC_1} + 1$, így

$$C_2C_3 = C_3F = \frac{CF}{\frac{BC}{BC_1} + 1}.$$

Tehát

$$C_2C_3 = \frac{CF}{\frac{BC}{BC_1} + 1} = \frac{s - c}{\frac{a}{s-b} + 1} = B_2B_3.$$