I. megoldás. Először belátjuk, hogy a legnagyobb összeg elérhető olyan a_i számokkal, amelyekre igaz a következő: ha a_i és a_j pozitív számok, és $i<j$, akkor $i \mid j$.

Legyen S egy olyan összeg, amelynél van olyan i és j, hogy $i \nmid j$, $j \nmid i$, de $a_i>0$ és $a_j>0$.

Egy olyan „cserét” fogunk definiálni, ami az S összeget nem csökkenti. Legyen s_i, illetve s_j azon a_k számok összege, melyeknek indexével i, illetve j valódi osztó, vagy valódi többszörös relációban áll, azaz

$$s_i = \sum_{\substack{k\neq i\\ (i|k \vee k|i)}} a_k, \qquad \text{illetve} \qquad s_j = \sum_{\substack{k\neq j\\ (j|k \vee k|j)}} a_k.$$

Ekkor $i \nmid j$ és $j \nmid i$ miatt s_i-ben nem szerepel a_j, és s_j-ben nem szerepel a_i.

Legyen $s_i \geq s_j$. Az

$$S = \sum_{\substack{k\neq l\\ k|l}} a_k a_l$$

összeget bontsuk három részre; az első részben legyenek azok a kéttényezős szorzatok, amelyeknek valamely tényezője a_i, a másodikban azok, melyeknek valamely tényezője a_j, míg a harmadik „maradék” rész álljon azokból a szorzatokból, amelyeknek egyik tényezője sem a_i vagy a_j, azaz

$$S = a_i s_i + a_j s_j + \sum_{\text{„maradék”}} a_k a_l.$$

Ha most a_i-t kicseréljük $a_i' = a_i + a_j$-re, míg a_j-t $a_j' = 0$-ra, akkor az új S' összegre (mivel a maradék, i, j-től független rész nem változik)

$$S' - S = a_i' s_i + a_j' s_j - a_i s_i - a_j s_j = (a_i + a_j)s_i - a_i s_i - a_j s_j = a_j(s_i - s_j) \geq 0,$$

tehát az S összeget nem csökkentettük.

Mindaddig, amíg van olyan i és j, hogy $i \nmid j$, $j \nmid i$, de $a_i>0$ és $a_j>0$, hajtsuk végre a fent definiált cserét. A cserék nem folytatódhatnak a végtelenségig, mivel a pozitív a_k-k száma minden csere során 1-gyel csökken; emiatt legfeljebb 2017 lépés után nem tudunk többet cserélni. Ekkor valóban teljesül, hogy ha a_i és a_j 0-tól különböző számok, és $i<j$, akkor $i \mid j$. A továbbiakban már csak ezzel az esettel fogunk foglalkozni.

Legyenek a pozitív a_i számok indexei növekedő sorrendben $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Pozitív számok körében ha j valódi többszöröse i-nek, akkor $2\cdot i \leq j$. Emiatt az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ index-sorozatnak legfeljebb 11 tagja lehet, hiszen $1 = 2^0 \leq i_1$; $2 = 2^1 \leq i_2$; $4 = 2^2 \leq i_3$; $\ldots$; $1024 = 2^{10} \leq i_{11}$ és a 12-edik tag esetén $2018 < 2048 \leq i_{12}$ lenne.

Tizenegy ilyen tag viszont kiválasztható, ha például a 2018-nál kisebb 2-hatványokat vesszük; ekkor a pozitív tagok: $a_1, a_2, a_4, \ldots, a_{2^n}, \ldots; a_{1024}$.

Vizsgáljuk meg, hogy $1 \leq k \leq 11$ darab pozitív a_i tag esetén mekkora a maximális (k-tól függő) $S = S_k$ összeg.

Fel fogjuk használni a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést. Ennek alapján a nemnegatív, 1 összegű c_i számokra:

$$\frac{1}{n} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} \leq \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}{n}},$$

innen rendezéssel adódik:

$$\frac{1}{n} \leq c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2$$

(és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{1}{n}$.)

$$\begin{aligned} S_k &= a_{i_1}a_{i_2} + a_{i_1}a_{i_3} + \ldots + a_{i_{k-1}}a_{i_k} = \\ &= \frac{\left(a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \ldots + a_{i_k}\right)^2 - \left(a_{i_1}^2 + a_{i_2}^2 + a_{i_3}^2 + \ldots + a_{i_k}^2\right)}{2} = \\ &= \frac{1 - \left(a_{i_1}^2 + a_{i_2}^2 + a_{i_3}^2 + \ldots + a_{i_k}^2\right)}{2} \leq \frac{1 - \frac{1}{k}}{2}. \end{aligned}$$

Mivel nyilván $S_k < S_{k+1}$, akkor kapjuk a lehető legnagyobb S-et, ha a lehető legtöbb, azaz pontosan 11 pozitív a_i tagunk van. Ekkor

$$S = S_{11} \leq \frac{1 - \frac{1}{11}}{2} = \frac{5}{11}$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha mind a 11 pozitív a_i tagra $a_i = \frac{1}{11}$.

Összegezve: S maximuma $\frac{5}{11}$ és ez meg is valósítható, ha $a_1 = a_2 = a_4 = \ldots = a_{2^n} = \ldots = a_{1024} = \frac{1}{11}$.

Molnár Bálint (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Soroljuk az $1, 2, 3, \ldots, 2017, 2018$ számokat a $H_0, H_1, \ldots, H_{10}$ csoportokba aszerint, hogy multiplicitással számolva hány prímosztójuk van. Az 1 kerüljön H_0-ba, a prímszámok H_1-be, a prímszámok négyzetei, és azok a számok, amelyek két különböző prím szorzataként állnak elő kerüljenek H_2-be és így tovább. (Például $24 = 2^3 \cdot 3^1$ a H_4-be kerül, és ha egy n összetett szám prímfelbontása $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, akkor az a $H_{k_1+k_2+\ldots+k_l}$ csoportba kerül, míg az utolsó csoport: $H_{10} = \{2^{10}; 2^9 \cdot 3\} = \{1024; 1536\}$.)

A csoportok száma valóban 11 lesz, mert $2^{11} = 2048 > 2018$ miatt nincs olyan számunk, melynél a (multiplicitással számolt) prímosztók száma 10-nél több.

Ha az $i \neq j$ számokra $i \mid j$, akkor i és j más-más csoportba kerülnek, hiszen i-nek (multiplicitással számolva) kevesebb prímosztója van, mint j-nek.

Legyen $0 \leq i \leq 10$ esetén $b_i = \sum\limits_{j \in H_i} a_j$. (Például $b_0 = a_1$, $b_1 = a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_{2017}$, míg $b_{10} = a_{1024} + a_{1536}$.)

Tekintsük a

$$B = \sum_{0 \leq k < l \leq 10} b_k b_l = b_0 b_1 + b_0 b_2 + b_0 b_3 + \ldots + b_9 b_{10}$$

összeget. Legyen $i \in H_k$; $j \in H_l$; $i \neq j$; $i \mid j$. Ekkor a kéttényezős $a_i a_j$ szorzat a $b_k b_l = (\ldots + a_i + \ldots)(\ldots + a_j + \ldots)$ zárójel-felbontott alakjának valamely tagja. Emiatt

$$S \leq B = \sum_{0 \leq k < l \leq 10} b_k b_l = \frac{(b_0 + b_1 + \ldots + b_{10})^2 - \left(b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_{10}^2\right)}{2}.$$

Erre az összegre (az előző megoldásban leírt módon) adódik:

$$S \leq \frac{(b_0 + b_1 + \ldots + b_{10})^2 - \left(b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_{10}^2\right)}{2} \leq \frac{1 - \frac{1}{11}}{2} = \frac{5}{11}.$$

Másfelől az $S = \dfrac{5}{11}$ elérhető az $a_1 = a_2 = a_4 = a_8 = \ldots = a_{2^n} = \ldots = a_{1024} = \dfrac{1}{11}$ választással.

Jedlovszky Pál (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
Szabó Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Jedlovszky Pál a második megoldással ekvivalens saját megoldásában az ott definiált $H_0, H_1, \ldots, H_{10}$ halmazokat úgy vette fel, hogy $H_0 = \{1\}$; $H_1 = \{2; 3\}$; $H_2 = \{4; 5; 6; 7\}$; $\ldots$; $H_{10} = \{1024; 1025; \ldots; 2018\}$ legyen, míg *Tóth Balázs* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) egy 2018 csúcsú (1–2018-ig címkézett) gráf csúcsait színezte meg 11 színnel aszerint, hogy a megfelelő címke-számoknak (multiplicitással számolva) hány prímosztója van.