

**I. megoldás.** Megmutatjuk, hogy a kérdéses következtetés nem igaz. Rekurzívan felépítjük  $A$ -t,  $H$ -t, és az  $E \neq E'$  eltoláshalmazokat (mind  $\mathbb{R}$  nemüres részhalmazai), úgy, hogy

$$H = \bigcup_{e \in E} (A + e) = \bigcup_{e' \in E'} (A + e'),$$

és mind az  $A + e = \{a + e : a \in A\}$  ( $e \in E$ ) eltoltak, mind az  $A + e' = \{a + e' : a \in A\}$  ( $e' \in E'$ ) eltoltak páronként diszjunktak.

Legyen először  $A_1 = \{0\}$ ,  $E_1 = \{0\}$ ,  $E'_1 = \{1\}$ , és  $H_1 = (A_1 + E_1) \cup (A_1 + E'_1) = \{0, 1\}$ . Innen rekurzívan haladunk tovább. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a véges  $A_n$ ,  $E_n$ ,  $E'_n$  halmazokat úgy, hogy  $E_n \cap E'_n = \emptyset$ ,  $A_n + E_n$  és  $A_n + E'_n$  minden általuk lefedett elemet egyszer fednek (vagyis az  $A + e$  ( $e \in E_n$ ) halmazok páronként diszjunktak, és az  $A + e'$  ( $e' \in E'_n$ ) halmazok is páronként diszjunktak). Legyen ekkor  $H_n = (A_n + E_n) \cup (A_n + E'_n)$ . Most egymás után minden egyes  $h \in H_n$  elemre a következőt tesszük: ha  $h$  eddig nem volt benne  $A_n + E_n$ -ben, akkor beteszünk  $A_n$ -be egy  $a$ ,  $E_n$ -be egy  $e$  elemet, hogy azok összege éppen  $h$  legyen, és a korábbi tulajdonságok ne romoljanak el, azaz  $a$  ne legyen  $a_1 + e_1 - e_2$  alakú (ahol ezek korábbi elemek:  $a_1 \in A_n$ ,  $e_1, e_2 \in E_n$ ), és  $e$  se legyen  $e_1 + a_1 - a_2$  alakú (ahol  $e_1 \in E_n$ ,  $a_1, a_2 \in A_n$ ), sőt, az új  $e$  ne legyen  $E'_n$ -ben sem. Mindegyik feltétel véges sok elem letiltását jelenti. Ugyanígy járunk el  $A_n + E'_n$  esetében is. Így kapjuk az  $A_{n+1}, E_{n+1}, E'_{n+1}$  halmazokat, nyilván  $H_n \subseteq A_{n+1} + E_{n+1}$ ,  $H_n \subseteq A_{n+1} + E'_{n+1}$ .

Világos, hogy  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n$ ,  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$  megfelelnek, amennyiben a korlátosság is teljesül. Azonban a korlátosságot is könnyen betarthatjuk, ha minden új elemet a  $(-2, 2)$  intervallumból választunk a következőképpen: egy tipikus lépésben egy adott  $H_n \ni h \in (-2, 2) + (-2, 2) = (-4, 4)$  elemet akarunk felírni  $a + e$  alakban, ahol  $a \in A_{n+1}$ , és  $e \in E_{n+1}$  (vagy  $E'_{n+1}$ ). Világos, hogy mivel csak véges sok letiltott elem van, léteznek ennek megfelelő  $a, e \in (-2, 2)$  számok.

**II. megoldás** (Matołcsi Dávid dolgozata alapján). Legyen  $H$  a  $(-2, 2)$  nyílt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Legyen  $A \subset (-1, 1)$  a  $\pm(1 - 3^{-r})$  alakú számok halmaza, ahol  $r$  nemnegatív egész. Be fogjuk látni, hogy  $H$  többféleképpen is felbontható  $A$ -nak páronként diszjunkt eltoltjaira.

Legyen  $E$  a  $[-1, 1]$  zárt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Ekkor  $A + E = \{a + e : a \in A, e \in E\} \subseteq H$  (itt valószínűleg egyenlőség áll). Mivel  $A$  és  $A + 2/3$  is tartalmazza a  $2/3$  számot, ezért  $A$ -nak ez a két eltoltja nem diszjunkt. Elég belátni, hogy mindkettő kiegészíthető  $H$  felbontásává  $A$ -nak páronként diszjunkt eltoltjaira. Mivel  $H$  megszámlálható, elég belátni, hogy ha valamely  $e_1, \dots, e_n \in E$  számokkal képzett  $A + e_i$  eltoltak nem tartalmazzák a  $h \in H$  számot, akkor van olyan  $e \in E$  szám, hogy az  $A + e$  eltolt tartalmazza a  $h$  számot és diszjunkt  $A + e_1, \dots, A + e_n$  mindegyikétől.

Válasszuk az  $r \geq 2$  egész számot olyan nagynak, hogy  $3^{r-2}(h - e_i)$  egész legyen minden  $i = 1, \dots, n$  esetén, továbbá  $3^{-r} \leq 2 - |h|$  álljon. Ekkor  $|h| - (1 - 3^{-r}) \leq 1$ , tehát tudunk olyan előjelet választani, hogy az  $a = \pm(1 - 3^{-r})$  és  $e = h - a$  választással  $|e| \leq 1$ , azaz  $e \in E$  legyen. Ekkor  $h = a + e \in A + e$ .

Már csak azt kell belátnunk, hogy  $b, c \in A$  és  $1 \leq i \leq n$  esetén  $b + e \neq c + e_i$ , azaz  $b + h - a \neq c + e_i$ , vagyis  $a - b + c \neq h - e_i$ . Mivel  $h \notin A + e_i$ , ezért  $h - e_i \notin A$ , tehát  $a = b$  vagy  $a = -c$  esetén készen vagyunk, hiszen ekkor  $a - b + c \in A$ . (Utóbbi esetben használjuk, hogy az  $A$  halmaz a 0-ra szimmetrikus.) Egyéb esetben belátjuk, hogy  $3^{r-2}(a - b + c)$  nem egész, amiből a kívánt nem-egyenlőség azonnal következik.

Legyen  $b = \pm(1 - 3^{-s})$  és  $c = \pm(1 - 3^{-t})$ , ekkor  $3^r(a - b + c) = \pm(3^r - 1) \mp (3^r - 3^{r-s}) \pm (3^r - 3^{r-t})$ , ahol  $3^r$  egy 9-cel osztható egész,  $\mp 1 \pm 3^{r-s} \mp 3^{r-t}$  pedig nem, mert  $\max(s, t) > r$  esetén ez vagy  $\mp 1$ , vagy nem egész,  $\max(s, t) \leq r$  esetén pedig vagy  $\mp 3$ , vagy nem osztható 3-mal. Így tehát  $3^r(a - b + c)$  nem lehet 9-cel osztható egész.