

A $2n$ egymást követő egész szám halmazát jelölje $\mathcal{H}$. A $\mathcal{H}$ elemei között legfeljebb egy lehet osztható $2n$ -nel, hiszen két ilyen szám különbsége legalább $2n$, míg $\mathcal{H}$ legnagyobb és legkisebb elemének különbsége csupán $2n - 1$. Hasonló okból az $n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1$ számoknak legfeljebb két többszörösük lehet $\mathcal{H}$ -ban, mivel három ilyen többszörös közül a legnagyobb és legkisebb különbsége legalább $2(n + 1) > 2n - 1$.

A továbbiakban n paritása szerint két esetet különítünk el egymástól.

1. eset: n páros. Ekkor az $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ számok közül $\frac{n}{2}$ páros és ugyanennyi páratlan. Ha – a $2n$ kivételével – ezek közül mindegyik k -nak két többszöröse van $\mathcal{H}$ -ban, akkor ezek „szomszédos” többszörösök (ik és $(i + 1)k$), így a páratlanoknak egy páratlan és egy páros többszöröse, a párosoknak pedig két páros többszöröse található $\mathcal{H}$ -ban. Ez (a $2n$ egyetlen $\mathcal{H}$ -beli többszörösét is beszámítva $2(\frac{n}{2} - 1) + \frac{n}{2} + 1 = n + \frac{n}{2} - 1$ páros és) $\frac{n}{2}$ páratlan többszöröst jelentene $\mathcal{H}$ -ban; mivel azonban $\mathcal{H}$ -nak pontosan n páros és n páratlan eleme van, ebben az esetben legfeljebb $n + \frac{n}{2}$ lehet a $\mathcal{H}$ -ba eső többszörösök száma. Ez a korlát el is érhető: legyen $\mathcal{H} = \{n + 1, n + 2, \dots, 3n\}$, ekkor $(n + 1)$ -től $2n$ -ig mindegyik szám osztható az $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ számok közül valamelyikkel, mégpedig saját magával. A többiek közül pedig az $\frac{n}{2}$ darab páros szám: $2n + 2 = 2(n + 1), 2n + 4 = 2(n + 2), \dots, 3n = 2(\frac{3n}{2})$ osztható rendre $n + 1$ -gyel, $n + 2$ -vel, $\dots, n + \frac{n}{2}$ -vel.

2. eset: n páratlan. Az előző esethez hasonlóan, most $(\frac{n + 1}{2}$ páros és) $\frac{n - 1}{2}$ páratlan szám van az $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ számok között. Így a $\mathcal{H}$ -ba eső páratlan többszörösök száma $\frac{n - 1}{2}$, ezért a $\mathcal{H}$ -ban található többszörösök száma legfeljebb n (a $\mathcal{H}$ páros elemeinek a száma) $+ \frac{n - 1}{2}$. Az $n + \frac{n - 1}{2}$ korlát elérhető, ha például (ismét) a $\mathcal{H} = \{n + 1, n + 2, \dots, 3n\}$ választással élünk. Ekkor ugyanis az $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ számok saját magukkal, az $\frac{n - 1}{2}$ darab páros szám pedig: $2n + 2 = 2(n + 1), 2n + 4 = 2(n + 2), \dots, 3n - 1 = 2(\frac{3n - 1}{2}) = 2(n + \frac{n - 1}{2})$ saját magának a felével osztható.

Tehát $2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb $n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ olyan lehet, amely osztható az $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ számok valamelyikével.

Nyárfádi Patrik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)