

a) Legyen d a lemez teteje és a kondenzátor felső része közötti távolság (esetünkben $d = \frac{3}{4}d_0 = 3 \text{ cm}$), a lemez területe pedig A . A kialakuló elektromos tér olyan, mint amilyen egy U_0 feszültséggel feltöltött,

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

kapacitású kondenzátor belsejében lenne. A kondenzátor felső lemezére $Q = CU_0$ töltés kerül, az alumíniumlemez felső oldalára pedig $-Q$. (A lemez belsejében nincs elektromos tér, a kondenzátor alsó lemeze pedig töltetlen.)

Az így kialakuló „új kondenzátor” belsejében $E = U_0/d$ nagyságú, homogénnek tekinthető elektromos tér lesz, ami

$$F = \frac{1}{2}EQ = \frac{CU_0^2}{2d} = \frac{8}{9} \frac{AU_0^2\varepsilon_0}{d_0^2}$$

erőt fejt ki az alumíniumlemezre. Ha ez az erő nagyobb, mint a lemez

$$G = mg = \rho g A(d_0 - d) = \frac{1}{4} \rho g A d_0$$

súlya, akkor a lemez felemelkedik. ($\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ az alumínium sűrűsége.) Ez akkor következik be, ha

$$U_0 > \sqrt{\frac{9}{32} \frac{\rho g d_0^3}{\varepsilon_0}} \approx 232 \text{ kV}.$$

b) Legyen most a tápfeszültség U , a lemez vastagsága pedig $x d_0$. A lemez felemelkedésének feltétele:

$$F = \frac{AU^2\varepsilon_0}{2d_0^2(1-x)^2} > \rho g A x d_0 = G,$$

vagyis adott U esetén akkor emelkedik fel a lemez, ha a vastagságát jellemző x számra érvényes, hogy

$$\frac{\varepsilon_0 U^2}{2\rho g d_0^3} > x(1-x)^2.$$

c) A b) részben kapott egyenlőtlenséget a feszültségre rendezve:

$$U > \sqrt{x(1-x)^2} \cdot \sqrt{2 \frac{\rho g d_0^3}{\varepsilon_0}} \approx \sqrt{x(1-x)^2} \cdot 620 \text{ kV}.$$

Az $f(x) = \sqrt{x(1-x)^2}$ függvénynek $x^* = \frac{1}{3}$ -nál helyi maximuma van, és a legnagyobb függvényérték a fizikailag értelmes $0 < x < 1$ tartományban

$$f_{\max} = f(x^*) = \sqrt{\frac{4}{27}} \approx 0,385.$$

(Ezt differenciálszámítással, grafikus ábrázolással, algebrai átalakítással, esetleg a <https://www.wolframalpha.com/> vagy a geogebra program segítségével láthatjuk be.)

Ezek szerint ha az U feszültség nagyobb, mint

$$U^* = f_{\max} \cdot 620 \text{ kV} \approx 240 \text{ kV},$$

akkor az alumíniumlemez a vastagságától függetlenül biztosan felemelkedik.

Bonifert Balázs (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján