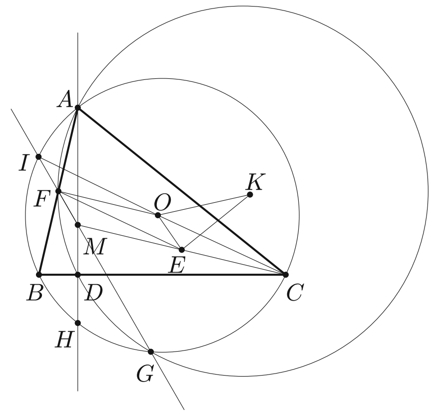
a) Legyenek I és H rendre az M pont tükörképei az F és D pontokra.



Közismert, hogy ekkor I és H rajta vannak az ABC háromszög köré írt körön. A húrtétel szerint $IM \cdot MG = HM \cdot MA$ (az M pontnak az ABC háromszög körülírt körére vonatkozó hatványa), ezért

$$2FM \cdot MG = 2DM \cdot MA,$$

vagyis $FM \cdot MG = DM \cdot MA$. Ebből a húrtétel megfordítása miatt következik, hogy $AFDG$ húrnégyszög.

b) F-re középpontosan tükrözve az AMF háromszöget a BIF háromszöget kapjuk, így $DAB\sphericalangle = MAF\sphericalangle = IBF\sphericalangle = IBA\sphericalangle$. Így $IBC\sphericalangle = IBA\sphericalangle + ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle + ABD = 90°$. Tehát IC az $AIBHCG$ kör átmérője a Thalész-tétel megfordítása miatt, vagyis O felezi IC-t. Ekkor a Thalész-tétel szerint $IGC\sphericalangle = 90°$, ezért $MGC\sphericalangle = 90°$, és ezzel – ismét a Thalesz-tétel megfordítását alkalmazva – kapjuk, hogy G rajta van az MC átmérőjű körön, melynek középpontja E. Így $EM = EG = EC$. AZ OEF az MIC háromszög középvonal-háromszöge, ugyanis O felezi az IC, E az MC, F pedig az MI szakaszt. Ezért $OE \parallel IM \parallel FG$, továbbá $OF = EM = EG$. Tehát $OEGF$ trapéz, melynek szárai egyenlő hosszúak, vagyis húrtrapéz. Így FG felezőmerőlegese megegyezik OE felezőmerőlegesével, hiszen ez a trapéz szimmetriatengelye. Mivel K az $AFDG$ kör középpontja, rajta kell lennie FG felezőmerőlegesén, ekkor viszont rajta van OE felezőmerőlegesén is. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy $EK = OK$.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)