

I. megoldás. Az $x = 1$ -re nyilván $y = 1$ megfelelő. Ha $x > 1$ és páratlan, akkor legyen $y = x - 1$; ekkor

$$x + y + 1 = 2x \mid 2x^3 - 3(x - 1)x = x^3 + (x - 1)^3 + 1 = x^3 + y^3 + 1.$$

Végül, ha x páros, akkor legyen $y = x + 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= x + (x + 1) + 1 = \\ &= 2(x + 1) \mid (x + 1)(2x^2 + x + 2) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = \\ &= x^3 + (x + 1)^3 + 1 = x^3 + y^3 + 1. \end{aligned}$$

Legyen ezután x tetszőleges pozitív egész. Mivel

$$x^3 + y^3 + 1 = (x + y + 1)(y^2 - (x + 1)y + (x + 1)^2) + x^3 + 1 - (x + 1)^3,$$

azért $x + y + 1 \mid x^3 + y^3 + 1$ esetén $x + y + 1 \mid x^3 + 1 - (x + 1)^3$. Az utóbbi egész szám semmilyen pozitív egész x -re nem lehet 0 (hiszen két szomszédos pozitív köbszám különbsége nagyobb, mint 1), ezért csak véges sok osztója van. Tehát nincs olyan pozitív egész x , amelyhez végtelen sok megfelelő y tartozna.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ azonosság miatt

$$(x + 1) + y \mid (x + 1)^3 + y^3 = (x^3 + y^3 + 1) + (3x^2 + 3x).$$

Így y pontosan akkor teljesíti a feladat feltételét, ha $3x^2 + 3x = 3x(x + 1)$ osztható $x + y + 1$ -gyel. Ez pedig teljesül, ha $y = 2x - 1$, hiszen akkor

$$x + y + 1 = 3x \mid 3x(x + 1).$$

Az is látszik, hogy a 0-tól különböző $3x(x + 1)$ -nek csak véges sok osztója van, ezért $x + y + 1$ csak véges sok megfelelő értéket vehet fel, tehát y is.

Ajtai Boglárka (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Használjuk fel az $x^3 + y^3 + 1 = (x + y + 1)(x^2 - xy - x + y^2 - y + 1) + 3xy$ azonosságot. A feladat feltétele ekkor $x + y + 1 \mid 3xy$. A véges sok megfelelő tulajdonságú y létezése abból is következik, hogy ha (adott x mellett) $y > 3x^2 + 2x - 1$, akkor $3xy > 3xy - y + 3x^2 + 2x - 1 = (x + y + 1)(3x - 1)$ szerint $\frac{3xy}{x + y + 1} > 3x - 1$, másrészt a nyilvánvalóan teljesülő $y < x + y + 1$ egyenlőtlenség miatt $\frac{3xy}{x + y + 1} < 3x$. Így ilyenkor $\frac{3xy}{x + y + 1}$ két szomszédos egész szám közé esik, tehát nem lehet egész.

Győrfy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)