

A kétszeres szögeke vonatkozó $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azonosságot $2 \cos^2 x = \cos 2x + 1$ formában tagonként alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) + 1 \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) \right) + n. \end{aligned}$$

Pontosan azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) \right) = 0.$$

A megoldás további részében a komplex számok trigonometrikus alakját használjuk. Legyen

$$z = \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right).$$

Ekkor algebrai azonosság alapján

$$\begin{aligned} \frac{\cos(4\pi) + i \cdot \sin(4\pi) - 1}{\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) - 1} &= \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(\frac{4k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{4k\pi}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

Az $n \geq 3$ feltétel miatt $\frac{4}{n}$ nem lehet páros egész szám, így a nevezőben szereplő $\cos(4\pi) + i \cdot \sin(4\pi) - 1 \neq 0$. Viszont a számláló, $\cos(4\pi) + i \cdot \sin(4\pi) - 1 = 0$, tehát

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(\frac{4k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{4k\pi}{n} \right) \right) = 0.$$

Most használjuk fel a trigonometrikus alakban adott komplex számok szorzására vonatkozó azonosságot tagonként:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\cos(2\alpha) + i \cdot \sin(2\alpha) \right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(\frac{4k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{4k\pi}{n} \right) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\cos(2\alpha) + i \cdot \sin(2\alpha) \right) \left(\cos \left(\frac{4k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{4k\pi}{n} \right) \right) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) \right) + i \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy ez a komplex szám nulla, emiatt a valós része is nulla:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n} \right) \right) = 0.$$

Az eredeti állításhoz visszatérve tehát beláttuk, hogy

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) = n, \quad \text{vagyis} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2}.$$