

I. megoldás. Jelölje a harmadfokú polinomot $p(x)$, aminek a pozitív gyökei a , b és c . Ekkor $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$, így $A = -(a + b + c)$, $B = (ab + bc + ca)$, $C = -abc$, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség $A^2 + B^2 + 18C = (a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2 - 18abc > 0$. Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $18abc$ -t, és hajtsuk végre a bal oldalon kijelölt műveleteket. Így a bizonyítandóval ekvivalens

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + ab + ab + bc + bc + ca + ca + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2bc + a^2bc + \\ + ab^2c + ab^2c + abc^2 + abc^2 > 18abc \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami a 18 változós számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt igaz (hiszen a gyökök pozitívak), és a bal oldal szigorúan nagyobb, hiszen a gyökök nem esnek egybe a feltétel alapján.

Csiszár Zoltán (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A bizonyítandó

$$\begin{aligned} S = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + \\ + 2ab^2c + 2abc^2 - 18abc > 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenség bal oldala a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned} S &= (a^2 - 2abc + b^2c^2) + (b^2 - 2abc + a^2c^2) + (c^2 - 2abc + a^2b^2) + \\ &\quad + 2ab(c^2 - 2c + 1) + 2ac(b^2 - 2b + 1) + 2bc(a^2 - 2a + 1) = \\ &= (a - bc)^2 + (b - ac)^2 + (c - ab)^2 + 2ab(c - 1)^2 + 2ac(b - 1)^2 + 2bc(a - 1)^2, \end{aligned}$$

ami nyilván pozitív.

Hámori Janka (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)