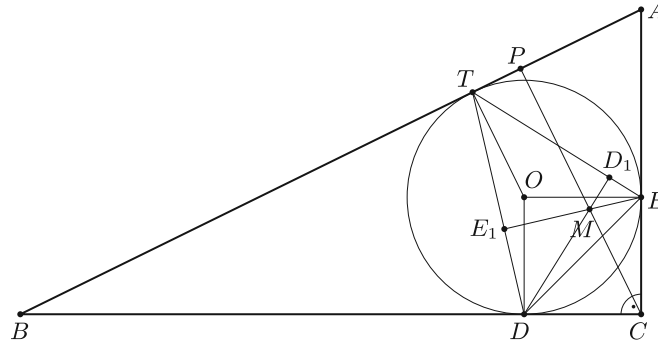


I. megoldás. Legyen a háromszög három csúcsa A , B és C , melyek közül C a derékszögű csúcs, és jelölje a B -nél lévő szöget β , az A -nál lévő szög ekkor $\alpha = 90^\circ - \beta$. Legyenek beírt kör érintési pontjai az AB , AC , BC oldalakon T , E , D , a TDE háromszög magasságpontja M , és a beírt kör középpontja O . Ekkor $OECD$ egy négyzet. Legyen E_1 és D_1 az ETD háromszög E -ből, illetve D -ből induló magasságának talppontja.



1. ábra

Végül legyen P az ABC háromszög C -hez tartozó magasságtalppontja, M_D a PC és DM egyenes metszéspontja, M_E pedig a PC és EM egyenes metszéspontja.

Végezzünk szögszámítást.

$$EDM \sphericalangle = EDD_1 \sphericalangle = 90^\circ - D_1ED \sphericalangle = 90^\circ - TED \sphericalangle.$$

A középponti és kerületi szögek tételéből

$$EDM \sphericalangle = 90^\circ - \frac{TOD \sphericalangle}{2}.$$

Mivel $ODB \sphericalangle = OTB \sphericalangle = 90^\circ$, ezért $OTBD$ húrnégyszög, így

$$EDM_D \sphericalangle = EDM \sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Hasonló módon

$$DEM \sphericalangle = DEE_1 \sphericalangle = 90^\circ - EDE_1 \sphericalangle = 90^\circ - EDT \sphericalangle = 90^\circ - \frac{EOT \sphericalangle}{2},$$

$OEA \sphericalangle = OTA \sphericalangle = 90^\circ$, $OTAE$ húrnégyszög, és

$$DEM_E \sphericalangle = DEM \sphericalangle = 90^\circ - \frac{180^\circ - (90^\circ - \beta)}{2} = 45^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Ismert továbbá, hogy $ACP \sphericalangle = \beta$, $PCB \sphericalangle = 90^\circ - \beta$, és $CAP \sphericalangle = 90^\circ - \beta$. Ezekből következik, hogy $ECM_E \sphericalangle = \beta$ és $DCM_D \sphericalangle = 90^\circ - \beta$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $CED \sphericalangle = CDE \sphericalangle = 45^\circ$, vagyis

$$CEM_E \sphericalangle = CED \sphericalangle + DEM_E \sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \text{és}$$

$$CDM_D \sphericalangle = CDE \sphericalangle + EDM_D \sphericalangle = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel $ECM_E \sphericalangle = ACP \sphericalangle = \beta$ és $CEM_E \sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$, ezért

$$EM_EC \sphericalangle = 180^\circ - \beta - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

vagyis az ECM_E háromszög egyenlő szárú, $EC = CM_E$.

Mivel $DCM_D \sphericalangle = PCB \sphericalangle = 90^\circ - \beta$ és $CDM_D \sphericalangle = 45^\circ + \beta/2$, ezért

$$DM_DC \sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\beta}{2},$$

vagyis DCM_D háromszög egyenlő szárú, $DC = CM_D$.

Mivel $OECD$ négyzet, így $EC = DC$, vagyis $CM_E = CM_D$, tehát $M_E \equiv M_D \equiv M$, tehát M rajta van a derékszögű csúcshoz tartozó magasságvonalon.

Az egyetlen kritikus pont a bizonyításban annak feltételezése, hogy a TED háromszög hegyesszögű (ebből következik, hogy M a háromszög belsejében van és az ábrán megfelelően állnak a szögek). A fentiek alapján

$$TED\triangleleft = \frac{TOD\triangleleft}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

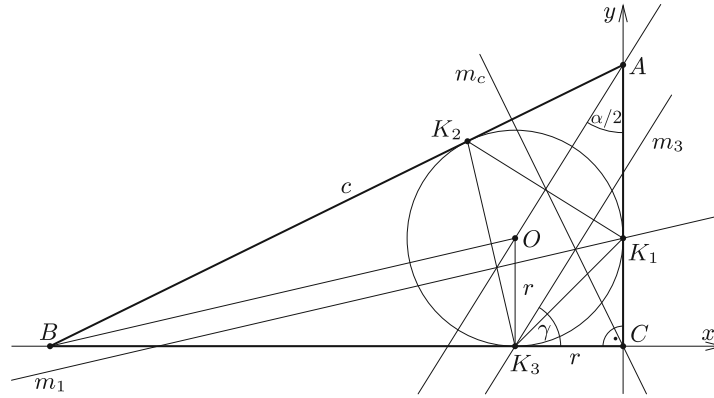
Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög.

$$EDT\triangleleft = \frac{EOT\triangleleft}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - \beta)}{2} = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Mivel β 0° és 90° közt van, így ez hegyesszög. $ETD\triangleleft = 180^\circ - TED\triangleleft - EDT\triangleleft = 45^\circ$. Ezek alapján a TED háromszög valóban hegyesszögű.

Zsigri Bálint (Budapest XIV. Ker. Szent István Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordináta-rendszerben a 2. ábrán látható módon. A derékszögű háromszög beírt körének érintési pontjait jelölje K_1 , K_2 és K_3 . A K_1 -hez és K_3 -hoz tartozó magasságvonalak legyenek m_1 és m_3 , a c oldalhoz tartozó pedig m_c . Felírva ezen magasságvonalak egyenleteit könnyen ellenőrizhetjük, hogy valóban egy pontban metszik-e egymást. Legyen $BAC\triangleleft = \alpha$, $ABC\triangleleft = \beta$ és jelölje γ az ábrán berajzolt szöget.



2. ábra

Mivel m_3 és az AO szögfelező is merőleges K_1K_2 -re, ezért párhuzamosak egymással. Az OK_3CK_1 négyszög egy r oldalú négyzet, ezért m_3 a $-r$ koordinátánál metszi az x tengelyt, így egyenlete $y = \tan \gamma \cdot x + \tan \gamma \cdot r$. Hasonlóan belátható, hogy m_1 párhuzamos BO -val és az y tengelyt r -nél metszi. Az egyenlete $y = \tan \frac{\beta}{2} \cdot x + r$. Az m_c magasság egyenes merőleges a c oldalra és az origón megy keresztül, ezért az egyenletét könnyen megkaphatjuk: $y = -\frac{1}{\tan \alpha} \cdot x$.

Az AO szögfelező és m_3 párhuzamosságából következik, hogy γ az $\frac{\alpha}{2}$ pótszöge. Felhasználva, hogy $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$, ebből $\gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ adódik. A félszögek tangensére vonatkozó azonosságot felhasználva $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta}$, valamint

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = \tan \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \beta}{2} \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta}.$$

Összegezve:

$$m_3 \text{ egyenlete: } y = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \cdot x + \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \cdot r = (x + r) \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta},$$

$$m_1 \text{ egyenlete: } y = \tan \frac{\beta}{2} \cdot x + r = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \cdot x + r,$$

$$m_c \text{ egyenlete: } y = -\frac{1}{\tan \beta} x = -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} x.$$

Az m_1 és az m_3 egyenes biztosan metszik egymást, még hozzá abban az x koordinátájú pontban, amelyre

$$(x + r) \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} x + r.$$

Ebből

$$\begin{aligned}
 x \left(\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} - \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} \right) &= r \left(1 - \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} \right), \\
 x &= r \cdot \frac{1 - \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta}}{\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} - \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta}} = r \cdot \frac{\frac{1 - \sin \beta - \cos \beta}{1 - \sin \beta}}{\frac{\cos \beta(1 + \cos \beta) - \sin \beta(1 - \sin \beta)}{(1 - \sin \beta)(1 + \cos \beta)}} = \\
 &= r \cdot \frac{(1 - \sin \beta - \cos \beta)(1 + \cos \beta)}{\cos \beta + \cos^2 \beta - \sin \beta + \sin^2 \beta} = \\
 &= r \cdot \frac{1 - \sin \beta - \cos \beta + \cos \beta - \sin \beta \cos \beta - \cos^2 \beta}{\cos \beta - \sin \beta + 1} = \\
 &= \frac{\sin \beta(\cos \beta - \sin \beta + 1)}{\cos \beta - \sin \beta + 1} = -r \cdot \sin \beta.
 \end{aligned}$$

Behelyettesítve ezt az x értéket m_c és m_3 egyenletébe:

$$\begin{aligned}
 m_c: -\frac{\cos \beta}{\sin \beta}(-\sin \beta \cdot r) &= \cos \beta \cdot r, \\
 m_3: (-\sin \beta \cdot r + r) \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} &= \cos \beta \cdot r.
 \end{aligned}$$

Tehát valóban egy pontban metszik egymást.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Jelölje K_1 , K_2 és K_3 az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjait az oldalakon a 2. ábra szerint, és legyen a $K_1K_2K_3$ háromszög magasságpontja M .

Külső pontból körhöz húzott érintők hossza egyenlő, tehát $CK_1 = CK_3$. Továbbá az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre: $OK_1C \perp OK_3C = 90^\circ$. Mindezekből következik, hogy az OK_3CK_1 négyszög négyzet.

Legyen O az origo, valamint mutasson minden pontba azonos nevű helyvektor ($\vec{OA} = \mathbf{a}, \dots$).

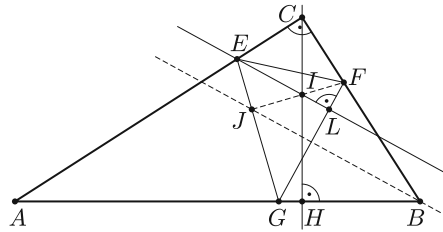
Ismert, hogy a háromszög köréírt körének O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege az O -ból a magasságpontba mutató vektor. Mivel most O a $K_1K_2K_3\Delta$ köré írt körének középpontja, ezért O -ból a háromszög M magasságpontjába az $\mathbf{m} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ vektor mutat.

OK_3CK_1 négyzet, ezért egyben paralelogramma is: $\mathbf{c} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3$. Ebből $\vec{CM} = \mathbf{m} - \mathbf{c} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2) - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) = \mathbf{k}_2 = \vec{OK_2}$.

Tudjuk, hogy $OK_2 \perp AB$, ezért a fentiekből következik, hogy $CM \perp AB$, és így M rajta van a C -ből induló magasságvonalon.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. évf.)

IV. megoldás. Az ABC háromszögbe írt kör érintési pontjai által meghatározott háromszög legyen EFG , és jelölje I az EL és CH egyenesek metszéspontját (3. ábra).



3. ábra

Mivel GF merőleges a CBH szögfelezőjére és merőleges EL -re, ezért EL párhuzamos a szögfelezővel. Legyen $\alpha = \angle CAB$ és $\beta = \angle CBA$, ekkor

$$\angle BCH = \alpha \quad \text{és} \quad \angle ACH = \beta, \quad \angle HBC \sim \angle HCA.$$

Tehát a HBC háromszöget el tudjuk forgatni H körül 90 fokkal, majd H pont körüli nagyítást alkalmazhatunk úgy, hogy a B pont a C pontba, a C pont pedig az A pontba kerüljön. Ekkor a HAC háromszöget fogjuk kapni, tehát EL merőleges az ACH szögfelezőjére (mert 90 fokkal forgattunk és AHC és CHB hasonló). Ebből következik, hogy $CE = CI$. Hasonlóan belátható, hogy FJ merőleges a BCH szögfelezőjére. Mivel $CE = CF$ (körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők), ezért $CF = CI$ is teljesül. Emiatt a BCH szögfelezője merőleges FI -re, vagyis F , I és J egy egyenesre esnek. Tehát FJ és CH metszéspontja is az I pont, azaz EFG magasságpontja az ABC háromszög C -hez tartozó magasságán fekszik.

Bukva Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)