

Nem igaz az állítás.

Fel fogjuk használni azt a könnyen belátható állítást, miszerint ha egy x valós szám felírható $q_1 + q_2\sqrt{2}$, vagy $q_1\sqrt{2} + q_2\sqrt{3}$, vagy $q_1\sqrt{3} + q_2$ alakban, ahol $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát jelöli), akkor ez a felírás egyértelmű. Például, ha $q_1\sqrt{2} + q_2\sqrt{3} = r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{3}$ (ahol $q_i, r_j \in \mathbb{Q}$), akkor $(q_1 - r_1)\sqrt{2} = (r_2 - q_2)\sqrt{3}$. Itt $q_1 - r_1$ pontosan akkor nulla, ha $r_2 - q_2$ az. Ha $r_2 - q_2 \neq 0$, akkor $\frac{q_1 - r_1}{r_2 - q_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, ami ellentmondás.

A valós számok tetszőleges H részhalmazára jelölje $C(H)$ a következő függvényt:

$$C(H)(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & \text{ha } x \in H; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az α valós számra legyen

$$H\alpha = \{h\alpha \mid h \in H\},$$

továbbá a H_1 és H_2 halmazok összegét jelölje

$$H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid h_j \in H_j \ (j = 1, 2)\}.$$

Legyen ezután

$$f = C(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}) + C(\mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3})$$

és

$$g = 3C(\mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}) - C(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}) + \frac{2}{7}.$$

Ekkor

$$h = f + g = C(\mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3}) + 3C(\mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}) + \frac{2}{7}.$$

Könnyen látható, hogy minden $q\sqrt{2}$ ($q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$) periódusa f -nek. Továbbá f pontosan a $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ halmaz elemeinél (a két halmaz metszetén) vesz fel $\frac{2}{7}$ függvényértéket, azaz minden p periódusra és $q \in \mathbb{Q}$ számra mivel $f(q\sqrt{2} + p) = f(q\sqrt{2}) = \frac{2}{7}$, így $q\sqrt{2} + p$ -nek szintén $q'\sqrt{2}$ ($q' \in \mathbb{Q}$) alakúnak kell lennie, azaz szükségszerűen p is ilyen alakú. Vagyis f periódusainak halmaza $\mathbb{Q}\sqrt{2} \setminus \{0\}$.

Hasonlóan látható g -nél – a $\frac{4}{7}$ függvényérték vizsgálatából –, hogy g periódusainak halmaza $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, h -nál pedig a $\frac{6}{7}$ függvényértékből, hogy h periódusainak halmaza $\mathbb{Q}\sqrt{3} \setminus \{0\}$.

Tehát f , g és h periodikus, ám f -nek és g -nek nincsen közös periódusa.

Pituk Gábor (Veszprém, Lovassy László Gimn., 11. évf.)