

I. megoldás. A legnagyobb sugarú hozzáírt kör a leghosszabb oldalhoz tartozik. Feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$. A háromszögre vonatkozó ismert összefüggések (s a háromszög félkerülete):

$$r_a = \frac{T}{s-a} = \frac{2T}{b+c-a}, \quad R = \frac{abc}{4T}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ezek alapján:

$$\frac{2T}{b+c-a} \geq \frac{3abc}{8T}.$$

Átszorozás után a $16T^2$ helyére a Heron-képlet alapján beírhatjuk, hogy

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $b+c > a$, azaz $b+c-a$ pozitív, így egyszerűsíthetünk vele. Így a bizonyítandó állítás:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c) \geq 3abc.$$

(Itt is látható, hogy ez az állítás szimmetrikus a b és c változókra, tehát $b \geq c$ valóban feltehető.)

Most helyettesítsük az oldalakat a bizonyítandó egyenlőtlenségben a beírt kör által levágott érintőszakaszokkal, vagyis legyen $s-a = x$, $s-b = y$ és $s-c = z$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ezek mind pozitívak. Feltettük, hogy $a \geq b \geq c$, ennek megfelelően $z \geq y \geq x$ is igaz. A helyettesítés után:

$$2(x+y+z) \cdot 2y \cdot 2z \geq 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

A zárójelek fölbontása és a kifejezések összevonása után:

$$2xyz + 5y^2z + 5yz^2 \geq 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2x + 3zx^2.$$

Felírhatunk több egyenlőtlenséget, amelyek a $z \geq y \geq x$ feltételből azonnal következnek:

$$2xyz \geq 2xy^2,$$

$$3yz^2 \geq 3xz^2,$$

$$3y^2z \geq 3x^2z,$$

$$y^2z \geq xy^2,$$

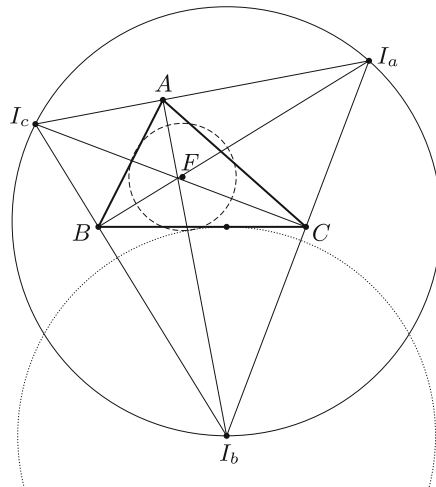
$$y^2z \geq x^2y,$$

$$2yz^2 \geq 2x^2y.$$

Ezeket összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti is igaz. Egyenlőség csakis úgy teljesülhet, ha $x = y = z$, vagyis a háromszög szabályos.

Tubak Dániel (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Jelölje szokásosan a, b, c az oldalakat, s a félkerületet, R a köréírt kör sugarát, továbbá r_a, r_b, r_c a hozzáírt körök sugarait, F a Feuerbach-kör középpontját, O a köréírt kör középpontját, I_a, I_b, I_c pedig a hozzáírt körök középpontjait.



$FI_a = \frac{R}{2} + r_a$, hiszen a Feuerbach-kör sugara $\frac{R}{2}$, továbbá a Feuerbach-kör érinti a hozzáírt köröket. Ezért hasonlóan $FI_b = \frac{R}{2} + r_b$, $FI_c = \frac{R}{2} + r_c$.

Rövid számolással belátható, hogy a hozzáírt körök középpontjaiból álló háromszög szögei $\frac{\alpha + \beta}{2}$, $\frac{\beta + \gamma}{2}$, $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ (ahol α, β, γ a háromszög szögei), így ez a háromszög hegyesszögű. A hozzáírt körök középpontjaiból rajzolt háromszög magasságainak talppontjai A, B, C , így e háromszög Feuerbach-köre éppen az ABC háromszög köréírt köre, melynek sugara R – vagyis az $I_a I_b I_c$ háromszög köréírt körének sugara $2R$.

Legyen ennek a körnek a középpontja G . A G az $I_a I_b I_c$ háromszögön belül van, hiszen ez a háromszög hegyesszögű. A síkon ez az egyetlen pont, amely az I_a, I_b, I_c pontok mindegyikétől legfeljebb $2R$ távolságra van, ugyanis ha vennénk az I_a, I_b és I_c középpontú $2R$ sugarú köröket, akkor azoknak még további közös pontja is lenne, de mivel a körvonalaik G -ben közösen metszik egymást és a köréírt kör középpontja egyértelmű (nincs a körvonalaknak még egy közös metszéspontja), ezért G az egyetlen ilyen pont.

Így van olyan körközéppont, mondjuk I_a úgy, hogy $FI_a > 2R$, azaz

$$\frac{R}{2} + r_a \geq 2R \quad \Leftrightarrow \quad r_a \geq \frac{3}{2}R.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha F és G egybeesik. Az I_a, I_b és I_c középpontú hozzáírt körök sugarai általában különbözőek. A G pont az $I_a I_b I_c$ háromszög körülírt körének középpontja, az eredeti F középpontú Feuerbach-kör pedig mindhárom hozzáírt kört kívülről érinti. Az F és G pontok tehát akkor eshetnek egybe, ha az F pont is egyenlő távolságra van mindegyik hozzáírt kör középpontjától, tehát a három kör sugara egyenlő, vagyis az eredeti háromszög szabályos.

Kerekes Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján