Legyen a kocka $ABCDA'B'C'D'$, aminek $ABCD$ és $A'B'C'D'$ két párhuzamos lapja, továbbá az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy térfogata egységnyi. Tegyük fel továbbá, hogy a kockát a Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 és Δ_5 tetraéderekre daraboltuk. Az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzetlapokat a tetraéderek háromszöglapjai lefedik, emiatt mindkettőre legalább két-két lap illeszkedik, továbbá mivel $ABCD$ és $A'B'C'D'$ párhuzamosak, így bármely tetraédernek legfeljebb az egyikre illeszkedhet lapja. Következésképpen két eset lehetséges: az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egyikét pontosan kettő, másikát pontosan három háromszöglap fedi, vagy mindkettőt pontosan kettő háromszöglap fedi.

Tegyük fel, hogy Δ_1 és Δ_2 egy-egy lapja együttesen lefedi $ABCD$-t. Nevezzük ezeket az $ABCD$-re illeszkedő lapokat rendre L_1-nek és L_2-nek, az ezekhez tartozó magasságokat pedig rendre m_1-nek és m_2-nek. Világos, hogy L_1 és L_2 területeinek összegére $T(L_1)+T(L_2)=1$, valamint $m_1 \le 1$ és $m_2 \le 1$ teljesül. Ebből megbecsülhetjük térfogataik összegét:

$$V(\Delta_1)+V(\Delta_2)=\frac{T(L_1)m_1+T(L_2)m_2}{3} \le \frac{T(L_1)+T(L_2)}{3}=\frac{1}{3}.$$

Teljesen hasonlóan megmutatható, hogy ha három tetraéder lapjai fedik $ABCD$-t, akkor a három tetraéder térfogatának összege szintén legfeljebb $\frac{1}{3}$, és ugyanezen megállapítások érvényesek az $A'B'C'D'$ lapra is.

Ezen térfogatbecslések alapján nem fordulhat elő az az eset, amikor az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egyikét pontosan kettő, másikát pontosan három háromszöglap fedi, hiszen ekkor az öt tetraéder térfogatának összege legfeljebb $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<1$ lenne. Vagyis (esetleges átindexelés után) feltehetjük, hogy Δ_1 és Δ_2 lapjai együttesen lefedik $ABCD$-t, és Δ_3 és Δ_4 lapjai együttesen lefedik $A'B'C'D'$-t. Ismét a térfogatbecslések miatt

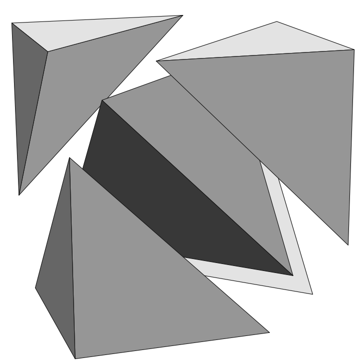
$$V(\Delta_1)+V(\Delta_2) \le \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad V(\Delta_3)+V(\Delta_4) \le \frac{1}{3},$$

így viszont $V(\Delta_5) \ge \frac{1}{3}$.

Világos, hogy $ABCD$ és $A'B'C'D'$ helyett bármely párhuzamos lappárra működik az érvelésünk, azaz bármely négyzetlapját a kockának pontosan két tetraéder egy-egy háromszöglapja fedi. Továbbá ha feltesszük, hogy valamely lap fedésében Δ_5 is részt vesz, mondjuk Δ_i párjaként, akkor a térfogatbecslés miatt $V(\Delta_5)+V(\Delta_i) \le \frac{1}{3}$, ami ellentmond $V(\Delta_5) \ge \frac{1}{3}$ következtetésünknek. Kaptuk tehát, hogy Δ_5-nek nincs közös lapsíkja a kockával, a Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 tetraéderek mindegyikének pedig pontosan három (mind a három párhuzamos lappárból egy-egy).

Vizsgáljuk most Δ_1-et. Egy négyzetet pontosan két háromszögre csak egy átlójával vághatunk, ebből következően Δ_1-nek a kocka lapjaira illeszkedő három lapja egy-egy egységnyi befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög. Mivel ezeknek a lapoknak páronként van egy-egy közös élük, így Δ_1 szükségképpen egy „saroktetraéder”, azaz egy olyan tetraéder, amelynek négy csúcsa a kocka egy csúcsából kiinduló három élének négy végpontja. Ugyanezen érvelés helyes Δ_2, Δ_3 és Δ_4 esetén is.

Végül világos, hogy Δ_5-nek Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 mindegyikével egy-egy $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög a közös lapja, vagyis Δ_5 egy $\sqrt{2}$ élhosszúságú szabályos tetraéder.



Jól ismert és az *ábra* alapján könnyen látható, hogy egy kocka valóban felbontható 5 tetraéderre. Ezzel az állítást beláttuk.