

Egy szám osztóinak számát úgy határozzuk meg, hogy prímtényezős felbontásában a prímszámok kitevőinél eggyel nagyobb számokat összeszorozzuk. A mi esetünkben ennek a szorzatnak prímszámnak kell lennie. Ha a prímtényezős felbontásban egynél több prímtényező szerepelne, akkor az osztók száma nem lenne prímszám; tehát mindkét szám prímszám.

Ebből következik, hogy ha az N számnak q darab osztója van, akkor a hatványkitevője $(q-1)$. Mivel N prímtényezős felbontásában egy prím szerepel és N osztható p -vel, így ez a prímszám a p . Tehát $N = p^{q-1}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $M = q^{p-1}$.

Meg kell vizsgálnunk, hogy az $N + M = p^{q-1} + q^{p-1}$ összeg mikor lesz ötjegyű. Az egyenlet jobb oldalán p és q felcserélésével ugyanazt az eredményt kapjuk, így az egyszerűség kedvéért egyelőre tételezzük fel, hogy $p \leq q$. Ha p^{q-1} legalább hatjegyű, akkor a $p^{q-1} + q^{p-1}$ összeg is az. Mivel 2^{18} , 3^{12} , 5^{10} , illetve 7^6 legalább hatjegyű, ezért csak az alábbi 13 esetet kellett megvizsgálnunk (a táblázat belsejében a megfelelő $p^{q-1} + q^{p-1}$ értékek állnak).

$p \backslash q$	2	3	5	7	11	13	17
2	4	7	21	71	1035	4109	65 553
3		18	106	778	59 170		
5			1250	18 026			

Ezekben az esetekben N és M lehetséges értékei (figyelembe véve, hogy felcserélhetők).

p	q	N	M
2	17	65 536	17
17	2	17	65 536
3	11	59 049	121
11	3	121	59 049
5	7	15 625	2401
7	5	2401	15 625

Varga Ákos (Kecskemét, Bánya Júlia Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A javítás során sajnos viszonylag kevés maximális értékű megoldás született. Sokan figyelmetlenségéből nem a feladat kérdésére válaszoltak, hanem csak a prímekeket adták meg, az N és M számokat nem. Szintén sokan voltak, akik hat helyett csak három megoldást adtak meg, és nem vették észre, hogy N és M felcserélhető. Sokan voltak azok is, akik nem indokoltak kellően részletesen, és emiatt veszítettek pontot (általában vagy N és M p -vel és q -val felírását nem vezették le, vagy a prímeke kiválasztásánál csak felírták a jókat, megmutatták, hogy azok tényleg jók, de nem indokolták, hogy más megoldások nem lehetnek). Aki egyáltalán nem indokolt, csak végeredményt közölt, az 0 pontot kapott, mivel a versenykiírás szerint pusztán az eredményközlésre nem adható pont. Emellett persze voltak szép megoldások is.