

Könnyen látható, hogy $a_i = \frac{1}{n^i}$ és $n \rightarrow \infty$ esetén, ha $i \neq 1$, akkor $\frac{a_i}{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}$ határértéke 0 lesz, $\frac{a_1}{a_n + a_1 + a_2}$ határértéke pedig 1, ezért a teljes összeg 1-hez konvergál. Az is látszik, hogy ha minden $a_{2k+1} = 0$, és minden $a_{2k} = 1$ lenne, akkor az összeg éppen $\frac{n}{2}$ egész része lenne; azonban az a_i számok előírt pozitivitása miatt $a_{2k+1} = 0$ helyett az $a_{2k+1} \rightarrow 0$ esetet vizsgáljuk: ilyenkor az összeg tetszőlegesen közelíti az $\frac{n}{2}$ egész részét. Ezzel a feladat második részének két követelményét igazoltuk.

Rátérünk a két egyenlőtlenség bizonyítására.

Az 1 szigorú alsó korlát: $n = 3$ esetén a három tag összege $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1$. Belátjuk, hogy ha minden $a_1, \dots, a_n$ pozitív szám n -esre az összeg 1-nél nagyobb, akkor ez minden pozitív $a_1, \dots, a_{n+1}$ szám $n+1$ -esre is teljesül. Legyen a_i az $a_1, \dots, a_{n+1}$ számok közül a(z egyik) legkisebb; ekkor speciálisan $a_i \leq a_{i-1}$ és $a_i \leq a_{i+1}$. Tekintsük azt a szám n -est, amelyet az $a_1, \dots, a_{n+1}$ számokból az a_i elhagyásával kapunk. Az ehhez a szám n -eshez tartozó összeget az $a_1, \dots, a_{n+1}$ -hez tartozó összegből kivonva a különbség:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i} + \frac{a_i}{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}} - \\ & - \frac{a_{i-1}}{a_{i-2} + a_{i-1} + a_{i+1}} - \frac{a_{i+1}}{a_{i-1} + a_{i+1} + a_{i+2}} = \\ & = \left(\frac{a_{i-1}}{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i} - \frac{a_{i-1}}{a_{i-2} + a_{i-1} + a_{i+1}} \right) + \\ & + \left(\frac{a_{i+1}}{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}} - \frac{a_{i+1}}{a_{i-1} + a_{i+1} + a_{i+2}} \right) + \frac{a_i}{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}. \end{aligned}$$

Itt az első különbség $a_i \leq a_{i+1}$, a második pedig $a_i \leq a_{i-1}$ miatt nemnegatív, az utolsó tag pedig az a_k számok pozitív voltából adódóan pozitív, tehát az $n+1$ számhoz tartozó összeg nagyobb, mint az a_i elhagyásával kapott n számhoz tartozó összeg; ezzel az első egyenlőtlenséget az n szerinti indukcióval beláttuk.

Az $\left[\frac{n}{2}\right]$ szigorú felső korlát: Bármely két szomszédos tag összege legfeljebb 1, hiszen

$$\frac{a_i}{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}} < \frac{a_i + a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} = 1.$$

Tehát páros n -re kettesével összepárosítva a tagokat, éppen a kívánt állítást kapjuk.

Páratlan n -re indukcióval bizonyítunk; $n = 3$ esetén a három tag összege, mint korábban láttuk, $1 = \left[\frac{3}{2}\right]$.

Tegyük föl ezután, hogy az egyenlőtlenség bármely $n - 2 = 2k + 1$ szám esetén fennáll, és tekintsünk $n = 2k + 3$ pozitív számot. Ha létezik köztük a_i, a_{i-1} úgy, hogy $a_{i-1} \geq a_{i+1}$ és $a_i \geq a_{i-2}$, akkor őket elhagyva, a kapott $n - 2$ tagú sorozathoz tartozó összeget jelölje $S(n - 2)$, az n számból álló sorozathoz tartozó összeget pedig $S(n)$. Ekkor

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n - 2) - \left(\frac{a_{i-2}}{a_{i-3} + a_{i-2} + a_{i+1}} - \frac{a_{i-2}}{a_{i-3} + a_{i-2} + a_{i-1}} \right) - \\ & - \left(\frac{a_{i+1}}{a_{i-2} + a_{i+1} + a_{i+2}} - \frac{a_{i+1}}{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}} \right) + \\ & + \frac{a_{i-1}}{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i} + \frac{a_i}{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}} \leq \\ & \leq S(n - 2) + \frac{a_{i-1}}{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i} + \frac{a_i}{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}} \leq \\ & \leq S(n - 2) + \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} + a_i} + \frac{a_i}{a_{i-1} + a_i} = S(n - 2) + 1, \end{aligned}$$

ami az indukciós feltevés szerint kisebb, mint $\left[\frac{n-2}{2}\right] + 1 \leq \left[\frac{n}{2}\right]$. Így az állítás minden pozitív szám n -esre is igaz.

Végül, a megfelelő, $a_{i-1} \geq a_{i+1}$ és $a_i \geq a_{i-2}$ feltételeket kielégítő a_i, a_{i-1} pár megtalálásához válasszuk a_i -nek a számok legnagyobbikát; ekkor speciálisan $a_i \geq a_{i-2}$. Ha ezen kívül $a_{i-1} \geq a_{i+1}$ is teljesül, akkor az a_i, a_{i-1} pár megfelelő. Ellenkező esetben $a_{i+1} > a_{i-1}$, akkor viszont az a_{i+1}, a_i pár felel meg.

Szabó Kornél (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)