

I. megoldás. Azt állítjuk, hogy k matematikus 2^{k-1} -féleképpen tud beköltözni a szobákba. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k = 1$: Egy ember egy szobába csak $1 = 2^0 = 2^{1-1}$ -féleképpen költözhet be.

$k = 2$: Az első ember beköltözik valamelyik szobába a kettő közül, a másodiknak már nincs választása, tehát $2 = 2^1 = 2^{2-1}$ -féleképpen tudnak beköltözni.

Most tegyük fel, hogy valamely k -ig ($k \geq 2$) minden pozitív egészre igaz az állításunk. Megmutatjuk, hogy ekkor $(k+1)$ -re is igaz, vagyis $k+1$ matematikus 2^k -féleképpen tud beköltözni a szobákba.

Ha az első ember a saját szobájába (az első számúba) megy, akkor utána mindenki a neki kijelölt szobába fog menni, tehát ez egyféle beköltözés.

Ha az első ember az n -edik szobába megy ($2 \leq n \leq k+1$), akkor egészen az $(n-1)$ -edik emberig mindenki más el tudja foglalni a saját szobáját. Foglalkozzunk a többi matematikussal, akiknek száma $(k+1) - (n-1) = k-n+2$. Az n -ediként érkezőnek az első foglalta el a szobáját, a többieké viszont még szabad. Vegyük észre, hogy éppen olyan helyzetben van ez a $k-n+2$ matematikus, mintha csak ők lennének a szállodában, és előttük senki sem érkezett volna. Mindenkinek megvan az előre kijelölt szobája: értelmezhető úgy, mintha az n -edik emberé lenne az 1. szoba, ő érkezne elsőnek, és neki felejtette volna el a recepciós megadni az utasítást. Vagyis ha az első ember az n -edik szobába megy ($2 \leq n \leq k+1$), akkor a többiek $2^{(k-n+2)-1}$ -féleképpen foglalhatják el a szobákat (az indukciós feltevés miatt).

Mivel n értéke 2 és $k+1$ között bármi lehet, így ezeket összegezve kapjuk meg, hogy $k+1$ matematikus hányféleképpen választhat szobát:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=2}^{k+1} 2^{(k-n+2)-1} &= 1 + \sum_{n=2}^{k+1} 2^{k-n+1} = \\ &= 1 + (2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 2^0) = 1 + (2^k - 1) = 2^k. \end{aligned}$$

Tehát 2^{99} -féleképpen költözhetnek be a szobákba a vendégek.

Weisz Máté (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Megvizsgálom a lehetőségek számát úgy csoportosítva, hogy hány ember nem került arra a helyre, ahova szánták:

– Ha minden ember oda került, akkor az első ember az első szobába ment, ez 1 lehetőség.

– Pontosan 1 ember nem kerülhetett rossz helyre.

– 2 ember került rossz helyre, ha az első vendég az n . szobát foglalta el ($2 \leq n \leq 100$), majd az n . vendég az első szobát választotta. Ez $99 = \binom{99}{1}$ lehetőség.

– 3 ember nem került jó helyre, ha az első ember elfoglalta az n . szobát ($2 \leq n \leq 99$), az n . ember elfoglal egy m . szobát ($n < m \leq 100$), az m . ember pedig az első. Ez annyi lehetőség, ahányféleképpen 2-től 100-ig 2 szobát ki tudunk választani, ahol a kisebb szám n -nek, a nagyobb m -nek felel meg, vagyis $\binom{99}{2}$ lehetőség.

– Hasonlóan gondolkodva: ha x ember került rossz helyre ($2 \leq x \leq 100$), akkor a szobák közül 2-től 100-ig $x-1$ ember nincs jó helyen, hiszen $x > 1$ esetén az első szobában nem az első vendég foglal helyet. A 99 szoba közül $(x-1)$ -et $\binom{99}{x-1}$ -féleképpen lehet kiválasztani. Minden ilyen lehetőség egyféleképpen valósulhat meg, hiszen ha sorban vesszük a „rossz” szobákat, akkor a bent lakó vendégek érkezésének sorszáma is növekvő sorrendbe kerül, mivel minden vendég csak a saját, vagy nála nagyobb sorszámú szobába mehetett, mert a többi addigra feltöltötték.

Az összes lehetőség száma tehát: $1 + \binom{99}{1} + \binom{99}{2} + \binom{99}{3} + \dots + \binom{99}{99}$.

Mivel $1 = \binom{99}{0}$, így a lehetőségek száma $\binom{99}{0} + \binom{99}{1} + \binom{99}{2} + \binom{99}{3} + \dots + \binom{99}{99}$, ami a Pascal-háromszög 100. sorában lévő számok összege. Az első sorban az összeg 1; és utána minden egyes szám az alatta lévő sorba két számhoz adódik hozzá, tehát a számok összege lefelé mindig megkétszereződik, a 100. sorban 2^{99} .

Tehát 2^{99} -féleképpen költözhetnek be.

Vida Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Legyen a lehetséges beköltözések száma n darab matematikus esetén C_n . Nyilvánvaló, hogy $C_1 = 1$. n matematikus esetén, ha az első matematikus az első szobába költözik be, akkor mindenki egyértelműen beköltözik az érkezésének megfelelő szobába. Ha az első matematikus beköltözik a k -adik szobába ($2 \leq k \leq n$), akkor az első utáni $k-2$ matematikus egyértelműen be tud költözni az érkezésének megfelelő szobába. A maradék $n-k+1$ matematikusnak adott az 1., $(k+1)$ -edik, $(k+2)$ -edik, $\dots$, n -edik szoba a beköltözésre. Ekkor tekintsük a szobaszámokat 1, 2, 3, $\dots$, $(n-k+1)$ -nek. Ekkor az első matematikus tetszőleges szobába költözik be, a többi pedig a feladat szövegének

megfelelően, tehát ekkor C_{n+k-1} -féleképpen tudnak beköltözni a matematikusok. Így

$$\begin{aligned} C_n &= 1 + C_{n-2+1} + C_{n-3+1} + \dots + C_{n-n+1} = \\ &= 1 + C_{n-1} + C_{n-2} + \dots + C_1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i. \end{aligned}$$

Ebből

$$C_{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i,$$

és így

$$C_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} C_i + C_{n-1} = 2 \cdot C_{n-1}.$$

Tudjuk, hogy $C_1 = 1$, így $C_n = 2^{n-1}$.

Ebből pedig következik, hogy 100 matematikus esetén a lehetséges beköltözések száma 2^{99} .

Győrfi Ádám György (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 9. évf.)

IV. megoldás. Vegyünk egy tetszőleges 100 jegyű kettes számrendszerbeli számot. Minden számjegy azt jelöli, hogy az adott ember jó szobában van-e: a 0 azt, hogy jó ember van a szobában, az 1 pedig azt, hogy nem.

Ha az első számjegy 0 (balról nézve), akkor minden számjegy 0, mert ha az első ember jó helyre ment, akkor már mindenki más is.

Ha első számjegy 1 (balról nézve), akkor ez azt jelenti, hogy az első ember nem jó szobába ment. Ha az x -edik szobába ment, akkor x és az 1 számjegy között csupa 0 van.

Ugyanígy, ha az n -edik ember az i . szobát választja (ahol $i \neq 1$ és $n > 1$), akkor $i > n$ és az n és i sorszámú számjegyek között minden szám 0 lesz. Ha az n -edik ember az 1-es szobát választja, akkor minden n feletti számjegy 0 lesz.

Olyan nem fordulhat elő, hogy az első számjegy 1 és a többi 0, mert az első ember elfoglalja valakinek a szobáját.

Ilyen módon minden ilyen kettes számrendszerbeli számból egyértelműen kiszámolható, hogy ki melyik szobába ment és fordítva: abból, hogy ki melyik szobába ment, leírható pontosan egy kettes számrendszerbeli szám.

(Pl. 100100100110100...0010: Az 1. ember a 4. szobába ment, a 4. ember a 7. szobába, a 7. ember a 10. szobába, a 10. ember a 11. szobába, a 11. ember a 13. szobába, ..., a 99. ember az 1. szobába. Mindenki más a saját szobájába ment.)

Összesen tehát $2^{99} - 1 + 1 = 2^{99}$ eset van.

Fraknoi Ádám (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 11. évf.)

V. megoldás. Tekintsük a feladatot általánosan: n egy adott pozitív egész, és n matematikus érkezik a szállodába, 1-től n -ig számozott szobákba a feladatban leírt módon. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ekkor a vendégek 2^{n-1} -féle sorrendben költözhetnek be a szobákba. Ez $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz, hiszen 1 ember csak egyféleképp költözhet be az egyetlen szobába.

Tegyük fel, hogy egy adott n pozitív egészre beláttuk, hogy n vendég 2^{n-1} -féleképpen költözhet be a leírt módon. Ezt felhasználva számláljuk össze, hányféleképpen költözhet be $n + 1$ matematikus.

Megfigyelhető, hogy az $n + 1$. matematikus vagy az egyes számú, vagy az $(n + 1)$ -es számú szobába költözhetett be, hiszen ha az i . számú szoba $2 \leq i \leq n$ -re még szabad az i . matematikus érkezésekor, akkor ő ide költözik, és elfoglalja azt, tehát az $(n + 1)$ -edik vendég már nem költözhet ide.

Az olyan beköltözési sorrendek száma, melyekben az $n + 1$. matematikus az $(n + 1)$ -es szobába kerül, éppen 2^{n-1} , hiszen ekkor az első n vendég beérkezési sorrendjére igaz, hogy az első vendég egy tetszőleges, 1-től n -ig számozott szobába költözött, a többi vendég pedig, ha tud, a saját sorszámával megegyező szobába, egyébként pedig egy tetszőleges, 1-től n -ig számozott szobába kerül, ami éppen az indukciós feltevésünk által megszámlolt (azaz az n vendégre vonatkozó) sorrendek száma.

Most tekintsünk olyan sorrendeket, melyekben az $n + 1$. matematikus az 1-es szobába kerül. Vegyünk egy ilyen sorrendet, és tegyük fel, hogy benne az i . vendég költözött az $(n + 1)$ -es sorszámú szobába (ahol $1 \leq i \leq n$ a feltevés szerint). Tekintsük azt a sorrendet, melyben minden vendég ugyanabba a szobába kerül, kivéve az i . és az utolsó vendéget, mert ezek szobáit felcseréljük (tehát az i . vendég az 1-es szobába, az $n + 1$. vendég pedig az $(n + 1)$ -es szobába kerül). Az így kapott sorrend továbbra is a feltételeknek megfelelő, hiszen $i \neq 1$ esetén az i . vendég az eredeti sorrendben sem az i . sorszámú szobába kerül, azaz tetszőlegesen választhat szobát, akár az elsőt is, $i = 1$ esetén pedig az első vendég egyébként is tetszőlegesen választhat. Az i . vendég előtt érkezők továbbra is szabályosan költöznek be, és az utána következők is, hiszen $i < j < (n + 1)$ -re a j -edik vendég nem költözhet az $(n + 1)$ -es számú szobába, mert ekkor az $n + 1$. vendégnek nem lenne helye (az 1-es és az $(n + 1)$ -es szoba is foglalt lenne már, ami nem lehet). Így tehát minden sorrendhez, melyben az $n + 1$. matematikus az 1-es szobába kerül, rendelhető egy olyan, melyben

az $(n + 1)$ -edikbe kerül. Ugyanez a hozzárendelés visszafelé is elvégezhető: ha az $(n + 1)$ -edik matematikus az $(n + 1)$ -edik szobába költözik, és az i -edik vendég az egyes szobába, akkor az i szobáikat kicserélve ismét megfelelő sorrendhez jutunk. Könnyen látható, hogy ezek a hozzárendelések egymás inverzei, így azon sorrendek száma, melyekben az $n + 1$. matematikus az egyes sorszámú szobába költözik, ugyanannyi, mint melyekben az $(n + 1)$ -es számúba, azaz 2^{n-1} . A kettőt összevetve kapjuk, hogy $n + 1$ matematikus éppen $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ -féleképp költözhet be. Ezzel az indukciós lépést beláttuk.

Az eredményt $n = 100$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy 100 matematikus 2^{99} -féleképp költözhet be.

Schretnner Jakab (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.)