I. megoldás. Először a következő segédtételt igazoljuk: minden $x > 1$ valós számra

$$\ln\ x + \sqrt{\frac{1}{x}} < \sqrt{x}.$$

Bizonyítás: Ha $x > 0$, akkor az

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \ln\ x$$

függvény deriváltjára

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot \left(x + 1 - 2\sqrt{x}\,\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \geq 0,$$

ahol egyenlőség csak $x = 1$ esetén teljesülhet. Ennélfogva $f(x)$ pozitív x-ekre szigorúan monoton nő, így minden $x > 1$ esetén

$$f(x) > f(1) = 0, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \ln\ x > 0,$$

amivel az állításunkat igazoltuk.

Mivel minden $1 \leq k$ egész szám esetén $\dfrac{k+1}{k} > 1$, a most belátott segédtétel alapján

$$\ln \frac{k+1}{k} + \sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sqrt{\frac{k+1}{k}},$$

amit minden $1 \leq k < n$-re összegezve

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k+1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k+1}{k}}.$$

Itt a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln\ k$$

összeg teleszkopikusan $\ln\ n$-nel egyenlő, vagyis

$$\ln\ n + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

minden $n > 1$ egész esetén, ami éppen a feladat állítása.

Daróczi Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az n szerinti indukcióval bizonyítunk; ha $n = 2$, akkor $\ln\ 2 + \sqrt{\dfrac{1}{2}} < \sqrt{2}$ teljesülése közvetlen számolással ellenőrizhető. Az indukciós lépésben megmutatjuk, hogy $n-1$-ről n-re lépve a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala kevesebbel nő, mint a jobb oldal, vagyis

$$\ln\ n - \ln(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{n}} < \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

A fenti egyenlőtlenség azonos átalakításával és az $x = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ jelölést bevezetve:

$$\ln x^2 + \frac{1}{x} < x,$$
$$0 < x - \frac{1}{x} - 2\ln\ x.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség igazolásához elegendő megmutatni, hogy a $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln\ x$ függvény deriváltja pozitív, ha $x > 1$. Valóban: $g(1) = 0$, és minden $x > 1$-re

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 0.$$

Győrffy Ágoston (Budapest, Fazekas M. Gimn., 11. évf.)