

I. megoldás. Nevezzük *bandának* (n -dimenziós, $-1, 0, 1$ számokból álló) vektorok egy olyan háromelemű halmazát, amelyben a három vektor összege 0 . Legyen $\oplus$ az a tetszőleges n és m dimenziójú a és b vektorokra értelmezett művelet, amelynek eredménye az az $n + m$ dimenziójú vektor, amelynek első n koordinátája megegyezik a koordinátáival, a további koordinátái pedig b koordinátáival. Az n szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy az összes n -dimenziós ($0, \pm 1$ elemű) vektorok halmaza 3^{n-1} darab, páronként diszjunkt banda egyesítése. Az $n = 1$ esetén ez nyilvánvalóan igaz: egyetlen banda van, a $\{-1, 0, 1\}$. Tegyük föl, hogy $n = k$ -ra igaz az állítás. Az $n = k + 1$ -re belátandó tekintsünk egy, az $n = k$ esethez tartozó felosztásban szereplő $\{A, B, C\}$ bandát; ebből a következő, $n = k + 1$ dimenziós bandákat hozzuk létre:

$$\{A \oplus 0, B \oplus 1, C \oplus -1\}, \{A \oplus -1, B \oplus 0, C \oplus 1\}, \{A \oplus 1, B \oplus -1, C \oplus 0\}.$$

Ezzel (az indukciós feltevés alapján) $3 \cdot 3^{k-1} = 3^k$ darab $k + 1$ dimenziós bandát konstruáltunk, amelyek páronként diszjunktak, így összesen $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ darab különböző vektort tartalmaznak, tehát az összeset.

A feladat állítása ebből már egyszerűen következik, hiszen a követelmény szerint minden bandából legfeljebb két vektort választhatunk, és a bandák száma 3^{n-1} .

A bizonyított becslés éles: ha az összes olyan vektort tekintjük, aminek az első koordinátája 1 vagy -1 , a többi pedig ($0, 1$ és -1 közül választva) tetszőleges, akkor ezek száma éppen $2 \cdot 3^{n-1}$, és semelyik háromnak az összege nem nulla.

Noszály Áron (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az I. megoldásban bandáknak nevezett hármas csoportokba sorolást egyszerűbben is kaphatunk a következő módon. Mindegyik (n dimenziós, a $0, 1, -1$ elemekből képzett) vektorhoz adjuk hozzá a csupa 1 -esből álló (n dimenziós) $\mathbf{e}$ vektort, a koordináták összeadását modulo 3 végezve. (Vagyis $0+1 = 1, -1+1 = 0, 1+1 = -1$ szerint.) Ezzel páronként diszjunkt, $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{e}, \mathbf{v}-\mathbf{e}\}$ típusú vektor-hármasokhoz jutunk, amelyek elemei a bennük levő bármelyik vektorból az $\mathbf{e}$ legfeljebb kétszeri hozzáadásával előállíthatók, a három vektor összege pedig $\mathbf{v}+(\mathbf{v}+\mathbf{e})+(\mathbf{v}-\mathbf{e}) = 3\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Schifferer András (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)