

Először igazolunk egy lemmát.

Lemma. *Legyenek $0 \leq a \leq 1$ és b valós számok, valamint*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2}.$$

Ekkor $f(a, b) \leq f(0, b)$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = 0$ vagy $a = 1$ vagy $b = 0$.

A honlapunkon¹ megadtunk egy, a lemmával ekvivalens geometriai állítást, és annak a geometriai bizonyítását. Most megmutatjuk, számolással hogyan érhetünk célt. Az állítás átrendezéssel a következő alakban írható:

$$\sqrt{1+b^2} - \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2} - |b|.$$

Az a -ra tett feltevésünk szerint mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás. A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$(1) \quad \begin{aligned} 1+b^2 + 1-2a+a^2+b^2 - 2\sqrt{1+b^2}\sqrt{(1-a)^2+b^2} &\geq \\ &\geq a^2+b^2+b^2-2|b|\sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Az egyszerűsítések után vezessük be a $c = 1 - a$ jelölést (nyilván $0 \leq c \leq 1$), így rendezéssel (1) a következő alakra hozható:

$$c + |b|\sqrt{(1-c)^2 + b^2} \geq \sqrt{1+b^2}\sqrt{c^2 + b^2}.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, ezért újra négyzetre emelhetünk:

$$c^2 + b^2(1-c)^2 + b^4 + 2|b|c\sqrt{(1-c)^2 + b^2} \geq c^2 + b^2 + b^2c^2 + b^4.$$

Egyszerűsítések és rendezés után $2|b|c\sqrt{(1-c)^2 + b^2} \geq 2b^2c$ adódik. Mivel $2|b|c \geq 0$, így két eset van: ha $2|b|c = 0$, akkor $b = 0$ vagy $a = 1$ és egyenlőség áll. Egyébként $2|b|c > 0$ és oszthatunk vele:

$$\sqrt{(1-c)^2 + b^2} \geq |b|.$$

Ismét mindkét oldal nemnegatív, és újabb négyzetreemelés után a nyilvánvaló $(1-c)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. Itt egyenlőség $a = 0$ esetben áll. Mivel csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, így az eredeti állítást, és ezzel a lemmát beláttuk.

Válasszuk úgy a koordinátarendszerünket, hogy az egységnégyzet csúcsai legyenek $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ és $D(0, 1)$; továbbá legyen $P(x, y)$, ahol $0 \leq x, y \leq 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} PA + PB + PC + PD &= \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} = \\ &= f(x, y) + f(x, 1-y). \end{aligned}$$

A lemmát alkalmazva, majd kihasználva, hogy $0 \leq y \leq 1$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(x, 1-y) &\leq f(0, y) + f(0, 1-y) = \\ &= \sqrt{y^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{(1-y)^2} + \sqrt{1+(1-y)^2} = \\ &= y + 1 - y + f(y, 1) = 1 + f(y, 1). \end{aligned}$$

Ismét a lemma szerint $f(y, 1) \leq f(0, 1) = 1 + \sqrt{2}$, amiből az eddigiek szerint $PA + PB + PC + PD \leq 2 + \sqrt{2}$. Egyenlőség akkor teljesül, ha minden becslésünkben egyenlőség áll, könnyű meggondolni, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha P az egységnégyzet valamely csúcsa.

Borbényi Márton (Kaposvár, Tácsics Mihály Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Vázzunk egy második lehetséges megoldást, amely felhasznál néhány alapismeretet a kétváltozós függvényekről. Vezessük be a $g(P) = PA + PB + PC + PD$ függvényt. Ismert, hogy egy háromszögben a súlyvonal legfeljebb olyan hosszú, mint a súlyvonalat közrefogó oldalak számtani közepe. Ebből az elemi geometriai tényből azonnal következik, hogy ha a PQ szakasz felezőpontja F , akkor $g(F) \leq (g(P) + g(Q))/2$, és egyenlőség csak $P = Q$ esetben áll. Mivel a g függvény folytonos, így kaptuk, hogy g szigorúan konvex. A konvexitást kihasználva nem túl nehéz megmutatni, hogy a maximum a csúcsokban lesz, elég arra gondolni, hogy $ABCD$ minden többi pontja belső pontja egy olyan szakasznak, amelynek a végpontjai is $ABCD$ valamely pontjai.

¹ <https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B4878&l=hu>.