

I. megoldás. Feltételek: $x \neq \pm 2$, $x \in \mathbb{Z}$. Mivel

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 &= x^3 - 4x - 3x + 6 = x(x^2 - 4) - 3(x - 2) = \\ &= x(x - 2)(x + 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x - 3), \end{aligned}$$

így az egyenlet bal oldalának számlálóját átírva:

$$\frac{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)}{x - 2} = \frac{2x + 14}{x + 2}.$$

Mivel

$$\frac{2x + 14}{x + 2} = \frac{2x + 4 + 10}{x + 2} = 2 + \frac{10}{x + 2},$$

kapjuk, hogy

$$x^2 + 2x - 3 = 2 + \frac{10}{x + 2}, \quad \text{ahonnan} \quad x^2 + 2x - 5 = \frac{10}{x + 2}.$$

Figyelembe véve, hogy $x \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 2\}$, és így $x^2 + 2x - 5 \in \mathbb{Z}$, ahonnan következik, hogy $\frac{10}{x + 2} \in \mathbb{Z}$ kell legyen, azaz $x + 2$ a 10 osztója. Tehát $x + 2 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$.

Behelyettesítve látható, hogy egyik sem megoldás.

$x + 2 = 1$	$x = -1$	$1 - 2 - 5 \neq \frac{10}{1}$
$x + 2 = -1$	$x = -3$	$9 - 6 - 5 \neq \frac{10}{-1}$
$x + 2 = 2$	$x = 0$	$0 - 0 - 5 \neq \frac{10}{2}$
$x + 2 = -2$	$x = -4$	$16 - 8 - 5 \neq \frac{10}{-2}$
$x + 2 = 5$	$x = 3$	$9 + 6 - 5 \neq \frac{10}{5}$
$x + 2 = -5$	$x = -7$	$49 - 14 - 5 \neq \frac{10}{-5}$
$x + 2 = 10$	$x = 8$	$64 + 16 - 5 \neq \frac{10}{10}$
$x + 2 = -10$	$x = -12$	$144 - 24 - 5 \neq \frac{10}{-10}$

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szki., 11. évf.)

II. megoldás. Értelmezzünk, majd tüntessük el a nevezőket: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned} (x^3 - 7x + 6)(x + 2) &= (x - 2)(2x + 14), \\ x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 &= 2x^2 + 10x - 28, \\ x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x &= -40, \\ x^3(x + 2) - 9x(x + 2) &= -40, \\ x(x + 2)(x - 3)(x + 3) &= -40. \end{aligned}$$

Mivel az egész számok halmazán dolgozunk, ezért a -40 (nemcsak pozitív) osztóit kell megkeresnünk, ezeknek kell a tényezőknél megfelelniük.

A -40 osztói: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 és ezek -1 -szeresei. Az $x + 2$ és az $x + 3$ egymást követő egész számok, így csak az 1, 2; -2 , -1 ; 4, 5 és -5 , -4 számok jöhetnek szóba. Ezekben az esetekben $x = -1$; -3 ; 2; -6 . A -3 és a -6 nem jók, mert nem osztói a -40 -nek, a 2 pedig nincs benne az értelmezési tartományban. Nézzük meg, hogy $x = -1$ megoldás-e:

$$(-1) \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 2 \neq -40.$$

Tehát az egyenletnek nincs egész megoldása.

Görcs András (Somorja, Madách Imre Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Néhányan a 3-mal való oszthatóságot vizsgálták: az egyenletet átírták $(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 2(x + 7)$ alakra, majd megnézték $x \geq 0$, illetve $x < 0$ esetén, hogy ha x rendre 0, 1 vagy 2 maradékot ad 3-mal osztva, akkor mi a maradék a bal és a jobb oldalon. Mivel egyik esetben sem egyezik meg a maradék, ezért nincs megoldás az egész számok körében.