

Először vizsgáljuk meg, hogy a 2018 Fibonacci szám-e? A Fibonacci-sorozat a második tagtól kezdve szigorúan monoton növekedő, így elegendő a tagjait felsorolni amíg el nem érjük a 2018-at:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

A 2018 nem Fibonacci szám, a sorozat 17-edik és 18-adik tagja közé esik.

A továbbiakban belátjuk, hogy az (a_k) sorozatban nem fordul elő Fibonacci-szám. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $k = 0$ -ra igaz, mert $F_{17} < a_0 < F_{18}$. Tegyük fel, hogy valamely m -re $F_n < a_m < F_{n+1}$, ahol F_n a legnagyobb Fibonacci-szám, amely kisebb a_m -nél. Mivel a Fibonacci-sorozat a második elemétől kezdve szigorúan monoton növekedő, ezért

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2 \cdot F_n < a_m + F_n < F_{n+1} + F_n = F_{n+2}.$$

Az indukciós feltevést és az $a_m + F_n = a_{m+1}$ egyenlőséget felhasználva ebből

$$F_{n+1} < a_{m+1} < F_{n+2}$$

következik.

Az (a_k) sorozatban tehát nem fordul elő Fibonacci-szám.

Kupás Vendel Péter (Gyöngyösi Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés: Több versenyző azt is megmutatta, hogy tetszőleges n természetes számra $a_n = F_{n+18} - 566$. Mivel már az első tag esetén is nagyobb a megfelelő Fibonacci-számok különbsége, mint 566, nem lesz az (a_k) sorozatban Fibonacci-szám.