Matolcsi Dávid megoldása. $S(n)$-nek nevezem a feladatban definiált összeget. $N < n$-re $S(n)$ és $S(n+1)$ is egész, így

$$S(n+1) - S(n) = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}$$

is mindig egész.

Legyen $(a_1, a_n) = x$ és $a_1 = xa_1'$, illetve $a_n = xa_n'$. Ekkor

$$a_1'(S(n+1) - S(n)) = \frac{xa_n'a_1'}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} - a_n'$$

egész szám. Tehát

$$\frac{xa_n'a_1'}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x}$$

is egész.

Legyen most $(a_{n+1}, x) = y$ és $a_{n+1} = ya_{n+1}'$, illetve $x = yx'$. Így

$$\frac{xa_n'a_1'}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{x} = \frac{a_n'a_1'}{a_{n+1}'} + \frac{a_{n+1}'}{x'} = \frac{x'a_n'a_1' + a_{n+1}'^2}{x'a_{n+1}'}$$

egész. Tehát $x' \mid a_{n+1}'^2$. Másrészt tudjuk, hogy $(a_{n+1}', x') = 1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $x' = 1$, tehát $x = y$, azaz $x \mid a_{n+1}$.

Ezzel általánosan beláttuk, hogy $(a_1, a_k) \mid a_{k+1}$. Másrészt értelemszerűen $(a_1, a_k) \mid a_1$, így $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_{k+1})$.

Teljes indukció szerint tehát ha $k < t$, akkor $(a_1, a_k) \mid (a_1, a_t)$.

Mivel a_1-nek csak véges sok osztója van, az (a_1, a_t) sorozat pedig végtelen és monoton növekvő, létezik egy r korlát, amitől kezdve minden $(a_t, a_1) = x$ egyenlő. Így ettől kezdve minden $a_t = xa_t'$, ahol $(a_t', a_1') = 1$ (ahol $a_1 = xa_1'$). Ekkor

$$\frac{a_t}{a_{t+1}} + \frac{a_{t+1} - a_t}{a_1} = \frac{a_t'}{a_{t+1}'} + \frac{a_{t+1}' - a_t'}{a_1'} = \frac{a_t'a_1' + a_{t+1}'^2 - a_t'a_{t+1}'}{a_{t+1}'a_1'}$$

egész.

Ez azt jelenti, hogy $a_{t+1}' \mid a_t'a_1'$. Mivel $(a_{t+1}', a_1') = 1$, ezért $a_{t+1}' \mid a_t'$. Ez az r korláttól kezdve folyamatosan igaz, így $a_t' \mid a_r'$ és az a_t' sorozat monoton csökkenő. Mivel a_r'-nek csak véges sok osztója van, a végtelen a_t' sorozatnak egy M korlát után minden eleme egyenlő lesz.

Így $M < m$-re minden $a_m = xa_m'$ is egyenlő lesz, ezzel az állítást beláttuk.