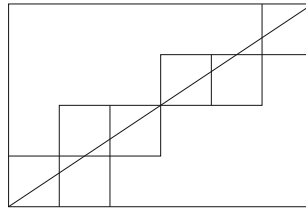


A bal alsó és a jobb felső csúcsot összekötő átló $n - 1$ vízszintes és $k - 1$ függőleges rácsegyenest metsz a téglalap belsejében. Pontosán akkor halad át egy, a jobb felső sarokban lévőől különböző (rács) egységnégyszet belsején, ha annak jobb oldali függőleges vagy felső vízszintes oldalát metszi.



E metszéspontok száma összesen $(n - 1) + (k - 1) = n + k - 2$. Azonban két ilyen metszéspont egybe is eshet; ez éppen akkor következik be, amikor az átló a téglalap belsejében lévő rácsponton halad át. Egy ilyen rácspont a téglalap bal alsó csúcsával egy $n_1 \times k_1$ -es rács téglalapot határoz meg, ahol $\frac{n}{n_1} = \frac{k}{k_1}$, azaz

$$nk_1 = n_1k, \quad \text{és} \quad 1 \leq n_1 < n, \quad 1 \leq k_1 < k \quad \text{egészek.}$$

Jelölje n és k legnagyobb közös osztóját d , ekkor

$$n = dn^*, \quad k = dk^*, \quad \text{ahol } n^* \text{ és } k^* \text{ relatív prímek.}$$

A korábbi összefüggésbe helyettesítve:

$$dn^*k_1 = n_1dk^*, \quad \text{azaz} \quad n^*k_1 = n_1k^*.$$

Ebből következik, hogy n_1k^* osztható n^* -gal, ami a relatív prímesség miatt csak akkor következik be, ha n_1 osztható n^* -gal: $n_1 = xn^*$, ahol x pozitív egész, és $n^*x < n = dn^*$ miatt $1 \leq x < d$; emiatt $k_1 = xk^*$.

A téglalap átlójára eső belső rácspontok száma tehát megegyezik x lehetséges értékeinek számával, $d - 1$ -gyel. Ennyi egységnégyszetet az $n + k - 2$ formulában kétszer számoltunk, így – az eddig kihagyott jobb felső sarok egységnégyszetével együtt – az átló $(n + k - 2) - (d - 1) + 1 = n + k - d$ egységnégyszet belsején halad keresztül.

Feladatunk ilymódon $n + k - d = 2018$ pozitív egész megoldásainak számát kérdezi, ahol $(n, k) = d$ és $n \geq k$. Mivel d az n -nek és a k -nak is osztója, azért $d \mid 2018 = 2 \cdot 1009$. Az 1009 prím, így d szóbajövő értékei: 1, 2, 1009 és 2018.

1. Ha $d = 1$, akkor az $n + k = 2019 = 3 \cdot 673$ egyenlet $(n, k) = 1, n \geq k \geq 1$ megoldásainak számát keressük. A relatív prímesség feltétele nélkül a megoldások száma 1009 lenne. Ezek közül azonban nem megfelelőek azok, amelyeknél n és k is osztható 3-mal, 673-mal vagy 2019-cel. Az ilyen megoldások száma rendre $\left\lfloor \frac{1009}{3} \right\rfloor = 336$, $\left\lfloor \frac{1009}{673} \right\rfloor = 1$, illetve $\left\lfloor \frac{1009}{2019} \right\rfloor = 0$, így a valamennyi feltételnek eleget tevő megoldások száma ebben az esetben $1009 - (336 + 1) + 0 = 672$.

2. Ha $d = 2$, akkor az $n + k = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ egyenlet $(n, k) = 2, n \geq k \geq 1$ megoldásainak számát keressük. Ez nyilván ugyanannyi, mint az $x + y = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ egyenlet $(x, y) = 1, x \geq y \geq 1$ megoldásainak a száma. Az első esetben alkalmazott számoláshoz hasonlóan ez

$$\begin{aligned} 505 - \left(\left\lfloor \frac{505}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{505}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{505}{101} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{505}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{505}{202} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{505}{505} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{505}{1010} \right\rfloor \right) = \\ = 505 - 358 + 53 - 0 = 200. \end{aligned}$$

3. Ha $d = 1009$, akkor az $n + k = 3027 = 3 \cdot 1009$ egyenlet $(n, k) = 1009, n \geq k \geq 1$ megoldásainak számát keressük. Az előző esethez hasonlóan ez ugyanannyi, mint az $x + y = 3$ egyenlet $(x, y) = 1, x \geq y \geq 1$ megoldásainak a száma, ami nyilván 1.

4. Ha $d = 2018$, akkor az $n + k = 4036 = 4 \cdot 1009$ egyenlet $(n, k) = 2018, n \geq k \geq 1$ megoldásainak számát keressük, ami 1, hiszen csak $n = k = 2018$ felel meg.

A négy esetet összegezve, a feladatnak eleget tevő számpárok száma $672 + 200 + 1 + 1 = 874$.

Döbrönte Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.)
megoldását felhasználva

Megjegyzés. Ha az $m \geq 2$ egész prímtényezőző alakja $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, akkor bármely m darab egymást követő egész szám közül az m -hez relatív prímek száma $\varphi(m) = p_1^{a_1-1}(p_1 - 1) \cdot p_2^{a_2-1}(p_2 - 1) \cdot \dots \cdot p_k^{a_k-1}(p_k - 1)$. (Ezt a megoldásban is többször használt szita formula segítségével (is) bizonyíthatjuk.) A fenti megoldásban mind a négy esetben egy $x + y = m$ típusú egyenlet olyan egész megoldásainak számát kerestük, ahol $(x, y) = 1$ és $x \geq y \geq 1$. Itt $1 \leq y \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, és az $(x, y) = 1$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $(y, m) = 1$. Ennek figyelembevételével több megoldó is a $\varphi(m)$ képletének alkalmazásával ért célba.