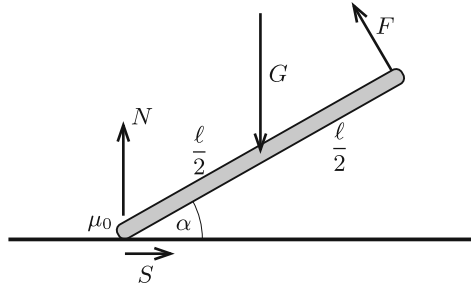


Tekintsük a lassan (gyorsulásmentesen) mozgatott rúd azon állapotát, amikor α szöget zár be a vízszintessel ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$). Az ℓ hosszú rúdra négyféle erő hat: a rúd megemelt végénél a rúdra merőleges $\mathbf{F}$ erő, a rúd felezőpontjánál függőlegesen lefelé ható $\mathbf{G}$ nehézségi erő, a rúd alsó végénél pedig a függőlegesen felfelé ható $\mathbf{N}$ nyomóerő és a vízszintes $\mathbf{S}$ súrlódási erő (lásd az *ábrát*).



Az erők és a forgatónyomatékok egyensúlyának feltétele:

$$\begin{aligned} (1) \quad & F \sin \alpha = S, \\ (2) \quad & F \cos \alpha + N = G, \\ (3) \quad & F \ell = G \frac{\ell}{2} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ezekből megkaphatjuk, hogy

$$\begin{aligned} (4) \quad & F = \frac{G}{2} \cos \alpha, \\ (5) \quad & S = \frac{G}{2} \sin \alpha \cos \alpha, \\ (6) \quad & N = \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2}\right) G. \end{aligned}$$

Annak a feltétele, hogy a rúd az α szögű helyzetben *nem* csúszik meg:

$$(7) \quad \mu_0 \geq \frac{S(\alpha)}{N(\alpha)} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 - \cos^2 \alpha} \equiv f(\alpha),$$

ahol μ_0 a rúd és az asztallap közötti tapadó súrlódási együttható.

A rúd akkor állítható fel a megadott módon, ha a (7) egyenlőtlenség *tetszőleges* $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ szögnél teljesül, vagyis μ_0 nem kisebb, mint az $f(\alpha)$ függvény maximális értéke.

$f(\alpha)$ legnagyobb értékét numerikus módszerekkel (táblázat készítésével), differenciálszámítással vagy a WolframAlpha program felhasználásával kaphatjuk meg, de elemi módszerekkel is célhoz érhetünk. Ha $\sin \alpha$ -t és $\cos \alpha$ -t kifejezzük $\operatorname{tg} \alpha$ -val, a vizsgálandó függvény reciprokára a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{1}{f(\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Alkalmazva a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{f(\alpha)} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{8}.$$

Ezek szerint $f(\alpha)$ legnagyobb értéke, vagyis a csúszásmentes emeléshez szükséges legkisebb súrlódási együttható nagysága:

$$\mu_0^{\text{kritikus}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,35.$$