A feladat feltétele alapján $a \geq 0$, $b \geq 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$, így $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ léteznek. Legyen

$$E(a;b) = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}.$$

Azt kell belátni, hogy $E(a;b) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
E(a;b) &= \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} = \\
&= \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} = \\
&= \left(\frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2\right) + \left(ab + \frac{1}{4}a - a\sqrt{b}\right) + \left(ab + \frac{1}{4}b - b\sqrt{a}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + a\left(b + \frac{1}{4} - \sqrt{b}\right) + b\left(a + \frac{1}{4} - \sqrt{a}\right) = \\
&= \frac{1}{2}(a-b)^2 + a\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Tehát

$$E(a;b) = \frac{1}{2}\underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{a}_{\geq 0}\underbrace{\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{b}_{\geq 0}\underbrace{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0},$$

és mivel nemnegatív számok szorzata és összege is nemnegatív, kapjuk, hogy $E(a;b) \geq 0$ (és ez az, amit bizonyítani akartunk).

Az egyenlőség akkor teljesül, ha (az összegben) minden tag nulla:

$$\frac{1}{2}(a-b)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

és

$$a\left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{b} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{azaz} \quad b = \frac{1}{4}$$

és

$$a\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad \text{vagy} \quad \sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{azaz} \quad a = \frac{1}{4}.$$

Mindezek alapján az egyenlőség akkor teljesül (az $a = b$ feltétel figyelembevételével), ha $a = b = 0$, illetve ha $a = b = \frac{1}{4}$.

Molnár István (Békéscsaba, Széchenyi István Szki.,11. évf.)

Megjegyzés. A versenyzők többsége a honlapon közölthöz hasonló módon oldotta meg a feladatot. A leggyakoribb hiba az egyenlőség egyik esetének hiánya volt.