I. megoldás. A sakktáblának ez a tulajdonsága nem változik, ha a tábla két oszlopát vagy sorát (a rajtuk álló bábukkal együtt) megcseréljük, hiszen oszlopcserénél az oszlopokban nyilván megmarad ez a tulajdonság, a sorokban meg csak annyi történt, hogy adott soron belül kicseréltünk két mezőt, így a paritás szintén nem változik. Ugyanez a helyzet sorcserénél is.

Tehát szabadon cserélgethetjük az oszlopokat és a sorokat, az említett tulajdonságon ez nem fog változtatni. Számozzuk meg az eredeti sakktáblán a sorokat fentről lefele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 és s_8 jelöléssel, az oszlopokat pedig balról jobbra o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7 és o_8 jelöléssel. Cserélgessük úgy a sorokat, hogy utána a sorrend s_1, s_3, s_5, s_7, s_2, s_4, s_6, s_8 legyen, az oszlopokat pedig úgy, hogy a sorrendjük o_1, o_3, o_5, o_7, o_2, o_4, o_6, o_8 legyen. Ekkor úgy fog kinézni a tábla, hogy négy 4×4-es négyzetre lesz felosztva, amelyek közül kettő átellenes csupa fekete, a másik kettő meg fehér mezőkből áll. Erre tehát ugyanúgy teljesülnek a fenti feltételek, vagyis, hogy minden oszlopban és sorban páratlan számú mezőn áll bábu. Nézzük az egyik 4×8-as téglalapot, amelynek sorai s_1, s_3, s_5 és s_7. Ebben összesen négy sor van, mindben páratlan darab bábu, azaz összesen páros darab van, tehát ha a 4×4-es fekete részen összesen páros darab bábu áll, akkor a 4×4-es fehér részen is, ha pedig páratlan, akkor a fehéren is, vagyis ugyanaz a paritása a felső két 4×4-es négyzetben lévő bábuk számának. Ugyanígy látható, hogy a jobb felső 4×4-es fehér, és a jobb alsó 4×4-es fekete négyzetben lévő bábuk számának is ugyanaz a paritása, azaz a két fekete résznek is meg fog egyezni. Ez pedig azt jelenti, hogy bennük összesen páros számú bábu van, és éppen ezt akartuk belátni.

Csizmadia Viktória (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Mivel minden sorban páratlan számú bábu van, összesen páros bábu van a táblán (mivel számuk nyolc páratlan szám összege).

Egy sakktáblán azoknak a mezőknek ugyanolyan a színe, ahol a sor és az oszlop (amelyben a mező van) sorszámának összege ugyanolyan paritású. Tegyük fel, hogy akkor világos az adott mező, ha ez a szám páros (fordított esetben a lenti bizonyítás azt adja meg, hogy páros számú bábu áll világos mezőkön, de ebből következik, hogy sötéten is).

Vegyük az alábbi összeget: minden páros számú sornak és oszlopnak vesszük a bennük szereplő bábuk számát, majd ezt a nyolc számot összeadjuk. Az összeg (mivel mindegyik tagja páratlan és nyolc tagja van) páros. Ebben az összegben kétszer számoltuk azokat a mezőket, ahol a sor és az oszlop száma is páros (ezek világosak), így ez nem változtat az összeg paritásán. Egyszer sem számoltuk azokat, amelyeknél a sor és az oszlop száma is páratlan, így ezek sem változtatnak a paritáson (ezek a mezők is világosak). Egyszer számoltuk azokat, ahol vagy a sor, vagy az oszlop sorszáma páros, de nem mindkettőé (ezek a sötét mezők). Így ezeknek a száma határozza meg az összeg paritását. Ha az ezeken a mezőkön álló bábukból páratlan sok lenne, az összeg is páratlan lenne, ami ellentmondás. Így bizonyítottuk az állítást, páros sok bábu áll a sötét mezőkön.

Molnár Bálint (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Tudjuk, hogy lehet a bábuknak olyan elhelyezkedése, amikor páros sok bábu van a sötét mezőkön. Ha például csak a főátlóra teszünk nyolc darab bábut, akkor a sötét mezőkön nulla darab bábu lesz. Ekkor minden sorban és oszlopban egy bábu áll.

Ahhoz, hogy egy másik jó elhelyezkedést megkapjunk, egy vagy több rácstéglalap csúcsában levő mezőket kell „megváltoztatni”. Egy mezőt megváltoztatni azt jelenti, hogy, ha eddig volt ott bábu, akkor levesszük, ha eddig nem volt, akkor meg felteszünk egyet. Ez azért igaz, mert minden sorban és oszlopban páros sok mezőt kell megváltoztatunk, és ezt csak így lehet megtenni. Nyilván, ha egy lépésben kétszer változtatunk meg egy mezőt, akkor ugyanolyan marad.

Egy rácstéglalap mindenképpen páros sok sötét mezőt tartalmaz, hiszen, ha az „alsó” két mező különböző, akkor a „felső” kettő is, ha pedig azonosak, akkor a „felső” kettő is azonos. Így egy lépésben egy páros számmal változik a lefedett sötét mezők száma.

Ezekkel a lépésekkel minden lehetséges bábu-elhelyezkedést meg tudunk kapni, hiszen minden sorban és oszlopban akár 7 mezőt is beállíthatunk tetszőlegesen, a 8. pedig ezektől függ.

Ha a kiindulásnál páros sok sötét mezőn állt bábu, és minden lépésben páros sokat változtattunk meg, akkor mindig páros sok ilyen mező lesz.

Várkonyi Zsombor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)